

**О.Г. ТРОФИМОВА**

**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
УПРАВЛЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОМ**

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

О.Г. Трофимова

## **ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОМ**

*Рекомендовано методическим советом УрФУ  
в качестве **учебно-методического пособия** для студентов,  
обучающихся по программе бакалавриата по направлению подготовки  
220400 – Управление в технических системах*

Екатеринбург  
УрФУ  
2013

УДК 681.5:001.891.5(075.8)

ББК 32.965я73

Т76

Рецензенты:

кафедра общих профессиональных дисциплин Уральского технического института связи и информатики (филиал) ГОУ ВПО Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики (зам. завкафедрой, канд. техн. наук, доц. Н.В. Будылдина);

канд. физ.-мат. наук А. А. Старостин (Институт теплофизики УрО РАН)

Научный редактор – канд. техн. наук, доц. В. А. Морозова

**Трофимова, О. Г.**

**Т76** Теория и методы управления экспериментом: учебно-методическое пособие / О. Г. Трофимова. – Екатеринбург: УРФУ, 2013. – 136 с.

ISBN 978-5-321-02304-4

Пособие знакомит студентов с особенностями программного модуля *SIANRG*, предназначенного для синтеза и анализа систем автоматического регулирования. Анализ чувствительности параметров качества системы автоматического регулирования проводится как при детерминированных, так и при случайных вариациях параметров системы. Обработка результатов стохастического моделирования систем автоматического управления проводится с помощью корреляционного, регрессионного и дисперсионного анализа.

Библиогр.: 7 назв. Табл. 5. Рис. 81. Прил. 1.

УДК 681.5:001.891.5(075.8)

ББК 32.965я73

ISBN 978-5-321-02304-4

© Уральский федеральный  
университет, 2013

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методическое пособие предназначено для проведения лабораторного практикума по дисциплине «Теория и методы управления экспериментом» и знакомит студентов с особенностями программного модуля *SIANRG*, позволяющее провести синтез и анализ системы автоматического регулирования (САР).

*Цель лабораторной работы № 1* – провести детерминированное моделирование САР, т. е. провести синтез, получив оптимальные настройки регуляторов, а также провести анализ чувствительности разомкнутой системы к вариациям параметров (настроек регулятора) в частотной области.

*Цель лабораторной работы № 2* – провести детерминированное моделирование САР т. е. провести синтез, получив оптимальные настройки регуляторов, а также провести анализ чувствительности замкнутой системы к вариациям параметров (настроек регулятора) во временной области.

*Цель лабораторной работы № 3* – провести стохастическое моделирование САР, т. е. провести синтез, получив оптимальные настройки регуляторов, а также провести анализ вероятностных характеристик показателей качества к случайным вариациям параметров (математического ожидания) объекта управления.

*Цель лабораторной работы № 4* – провести стохастическое моделирование САР, т. е. провести синтез, получив оптимальные настройки регуляторов, а также провести анализ вероятностных характеристик показателей качества к случайным вариациям настроек (математического ожидания) регулятора.

*Цель лабораторной работы № 5* – провести стохастическое моделирование САР, т. е. провести синтез, получив оптимальные настройки регуляторов, а также провести анализ вероятностных характеристик показателей качества к случайным вариациям настроек (дисперсии) регулятора.

*Цель лабораторной работы № 6* – обработать результаты моделирования САР и провести корреляционный анализ. Определить степень зависимости по-

казателей качества САР при стохастическом варьировании параметров объекта управления.

*Цель лабораторной работы № 7 – обработать результаты моделирования САР и провести регрессионный анализ. Определить линейные зависимости показателей качества САР при стохастическом варьировании параметров объекта управления.*

*Цель лабораторной работы № 8 – обработать результаты моделирования САР и провести дисперсионный анализ. Определить генеральные дисперсии, дать оценку генеральных дисперсий и выявить влияние выбранного фактора – показателя качества САР – при стохастическом варьировании параметров объекта управления.*

## **1. ДЕТЕРМИНИРОВАННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ**

### **1.1. Методика моделирования систем**

Любую модель строят в зависимости от цели [1]. В качестве цели моделирования ставится задача изучения какой-либо стороны функционирования объекта (контроль параметров, оценка характеристик, управление объектом, прогнозирование поведения объекта). Цель может быть сформулирована качественно или количественно. При количественной формулировке цели строят целевую функцию, которая точно отображает наиболее существенные факторы, влияющие на достижение цели. В качестве цели моделирования выберем изучение функционирования системы, а именно оценивание ее характеристик.

Далее определяются с целью функционирования системы, которая обеспечивала бы эффективную работу системы, например для САР – устойчивость системы, высокая чувствительность к изменению параметров, оптимальные характеристики качества системы.

С учетом имеющихся ресурсов в качестве метода решения задачи выберем метод имитационного моделирования, который позволяет решать задачи анализа систем, включая задачи оценки: вариантов структуры системы, эффективно-

сти различных алгоритмов управления системой, влияния изменения различных параметров системы. Имитационное моделирование может быть положено также в основу структурного, алгоритмического и параметрического синтеза систем, когда требуется создать систему с заданными характеристиками при определенных ограничениях, которая является оптимальной по некоторым критериям оценки эффективности.

Основные этапы имитационного моделирования системы:

- построение концептуальной модели системы и ее формализация;
- алгоритмизация модели системы и ее компьютерная реализация;
- получение и интерпретация результатов моделирования системы.

Для реализации имитационной модели используются средства вычислительной техники, которые могут лишь помочь с точки зрения эффективности реализовать сложную модель, но не позволяют подтвердить ее правильность. Только на основе отработанных данных, опыта исследователя можно с достоверностью оценить адекватность модели по отношению к реальному процессу.

После построения модели требуется провести с нею эксперимент. Если цель эксперимента – изучение влияния переменной  $x$  на переменную  $y$ , то  $x$  – фактор, а  $y$  – реакция. Каждый фактор  $x_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , может принимать в эксперименте одно из нескольких значений, называемых уровнями. Фиксированный набор уровней факторов определяет одно из возможных состояний рассматриваемой системы.

Связь между уровнями факторов и реакцией (откликом) системы можно представить в виде соотношения

$$y_l = \Psi_l(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad l = \overline{1, m}. \quad (1.1)$$

Функцию  $\Psi_l$ , связывающую реакцию с факторами, называют функцией реакции. Исследователю заранее неизвестен вид зависимостей  $\Psi_l$ , поэтому используют приближенные соотношения:

$$\tilde{y}_l = \varphi_l(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad l = \overline{1, m}. \quad (1.2)$$

Зависимости  $\varphi_l$  находятся по данным эксперимента.

При построении плана эксперимента необходимо помнить, что целями проведения вычислительных экспериментов с моделью системы являются либо получение зависимости реакции от факторов для выявления особенностей изучаемого процесса функционирования системы (анализ модели), либо нахождение такой комбинации значений факторов, которая обеспечивает экстремальное значение реакции (синтез модели).

При проведении вычислительного эксперимента с моделью для оценки некоторых характеристик процесса функционирования исследуемой системы необходимо выявить влияние факторов, находящихся в функциональной связи с искомой характеристикой. Для этого необходимо отобрать факторы  $x_i, i = \overline{1, k}$ , влияющие на искомую характеристику, и описать функциональную зависимость; установить диапазон изменения факторов  $x_{i\min} \pm x_{i\max}$ ; определить координаты точек факторного пространства  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , в которых следует проводить эксперимент; оценить необходимое число реализации и их порядок в эксперименте.

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным экспериментом (ПФЭ). Если выбранная модель планирования линейная, то для оценки коэффициентов модели используется план эксперимента с варьированием всех  $k$  факторов на двух уровнях, т. е.  $q = 2$ . Такие планы называются планами типа  $2^k$ , где  $N = 2^k$  – число всех возможных испытаний. Для получения коэффициентов линейной модели варьирование факторов осуществляется одновременно на двух уровнях: нижнем  $x_{iн}$  и верхнем  $x_{iв}$  – симметрично расположенных относительно точки центра эксперимента  $x_{i0}, i = \overline{1, k}$ .

Однофакторный (классический) эксперимент предназначен для получения линейной экспериментальной факторной модели и предусматривает поочередное варьирование каждого из факторов при фиксированных на некотором уровне значениях остальных факторов. Фактор  $x_i$  варьируют на двух уровнях:

нижнем  $x_{iн}$  и верхнем  $x_{iв}$ , а все остальные при этом должны находиться в точке центра эксперимента  $x_{i0}$ ,  $j \neq i$ .

При синтезе системы на основе проведения вычислительных экспериментов с моделью возникает задача анализа чувствительности модели к вариациям ее параметров. Под анализом чувствительности модели понимают проверку устойчивости результатов моделирования, т. е. характеристик процесса функционирования системы, полученных при проведении имитационного эксперимента, по отношению к возможным отклонениям параметров вычислительной модели  $\Delta \vec{h} = (\Delta h_1, \dots, \Delta h_n)$  от истинных их значений  $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n)$ .

Малым отклонениям  $\Delta \vec{h}$  будут соответствовать изменения характеристик  $\vec{q}(\vec{h})$ , которые в практических расчетах можно оценить величиной

$$\Delta \vec{q} = \vec{q}'(\vec{h}) \Delta \vec{h} + r_0, \quad (1.3)$$

где  $\vec{q}'(\vec{h}) = (\partial q(\vec{h}) / \partial h_1, \dots, \partial q(\vec{h}) / \partial h_n)$ ;  $r_0$  – остаточный член второго порядка малости относительно вариации, который используется для проверки точности решения.

Частная производная  $\vec{q}'(\vec{h})$  определяется в точках, соответствующих номинальным значениям параметров  $\vec{h}_{ном}$ . Если  $\vec{h}_{ном} = \vec{h}^*$ , где  $\vec{h}^*$  – оптимальные параметры системы по показателю  $\vec{q}(\vec{h})$ , то  $\vec{q}'(\vec{h}_{ном}) = 0$  и необходимо проводить оценку с использованием второй производной  $\vec{q}''(\vec{h}_{ном})$ . Таким образом, частные производные  $\vec{q}'(\vec{h})$ ,  $\vec{q}''(\vec{h})$  количественно характеризуют чувствительность вычислительной модели к изменениям ее параметров.

Большие отклонения характеристик  $\vec{q}(\vec{h})$  при малых вариациях  $\Delta \vec{h}$  свидетельствуют о неустойчивости модели по отношению к этим вариациям. Для получения оценок  $\tilde{\vec{q}}(\vec{h})$  показателя  $\vec{q}(\vec{h})$  удобно рассматривать зависимые реализации внешних воздействий при различных  $\vec{h}$  и проводить соответствующую обработку результатов эксперимента с моделью.

Вопросы качества САР рассмотрены подробно в п. 1.2.4.



## 1.2. Модели систем автоматического регулирования

### 1.2.1. Элементы одноконтурной САР

Системы автоматического регулирования (САР) являются разновидностью систем управления. Основная функция САР состоит в поддержании выходной величины системы вблизи заданного значения. Одноконтурная САР является простейшей из всех прочих САР. По этой причине элементы моделирования систем автоматического управления целесообразно изучать на базе такой САР.

Структурная схема простейшей одноконтурной САР представлена на рис. 1.1, где введены следующие обозначения:  $g$  – задающее воздействие (уставка);  $f_{\text{вн}}$  – внутреннее возмущение по каналу регулирования;  $\varepsilon$  – сигнал ошибки;  $U$  – управляющее воздействие на объект управления (ОУ);  $y$  – выходной сигнал ОУ;  $R(s)$  – передаточная функция (ПФ) регулятора;  $W_{\text{об}}(s)$  – ПФ объекта управления по управляющему воздействию.

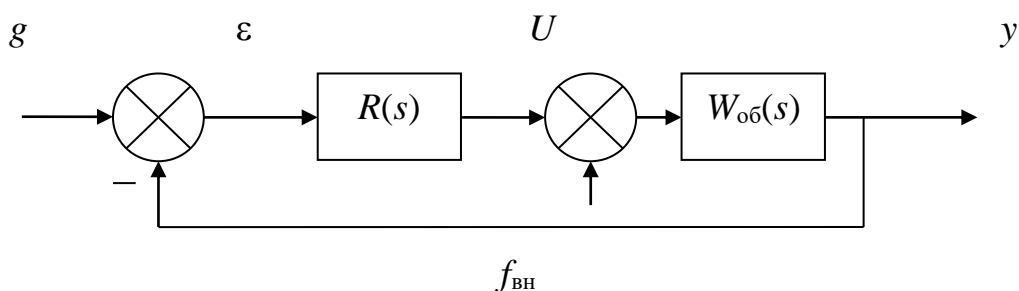


Рис. 1.1. Структурная схема одноконтурной САР

Для составления модели одноконтурной САР проводится синтез, при котором выбирают закон регулирования и определяют настройки блока регулирования. Во время анализа САР определяют ее устойчивость и качество по переходному процессу. Процедуры анализа являются основными элементами процесса моделирования САР. Для синтеза и анализа САР с одноконтурными регуляторами разработан программный модуль *SIANRG* [2]. В этом модуле реализованы различные формы математического представления ОУ и блоков регулирования [3].

### 1.2.2. Модели объекта управления

ОУ описывается передаточными функциями, которые характеризуют реакцию выхода системы на управляющее и возмущающее воздействия. ОУ классифицируют по числу входов, выходов и связей между входами и выходами.

Различают следующие структуры ОУ:

- с одним входом и одним выходом (рис. 1.2, а);
- с двумя входами и одним выходом (рис. 1.2, б);
- с одним входом, двумя выходами и параллельным соединением звеньев (рис. 1.2, в);
- с одним входом, двумя выходами и последовательным соединением звеньев (рис. 1.2, г);
- с двумя входами и двумя выходами (рис. 1.2, д).

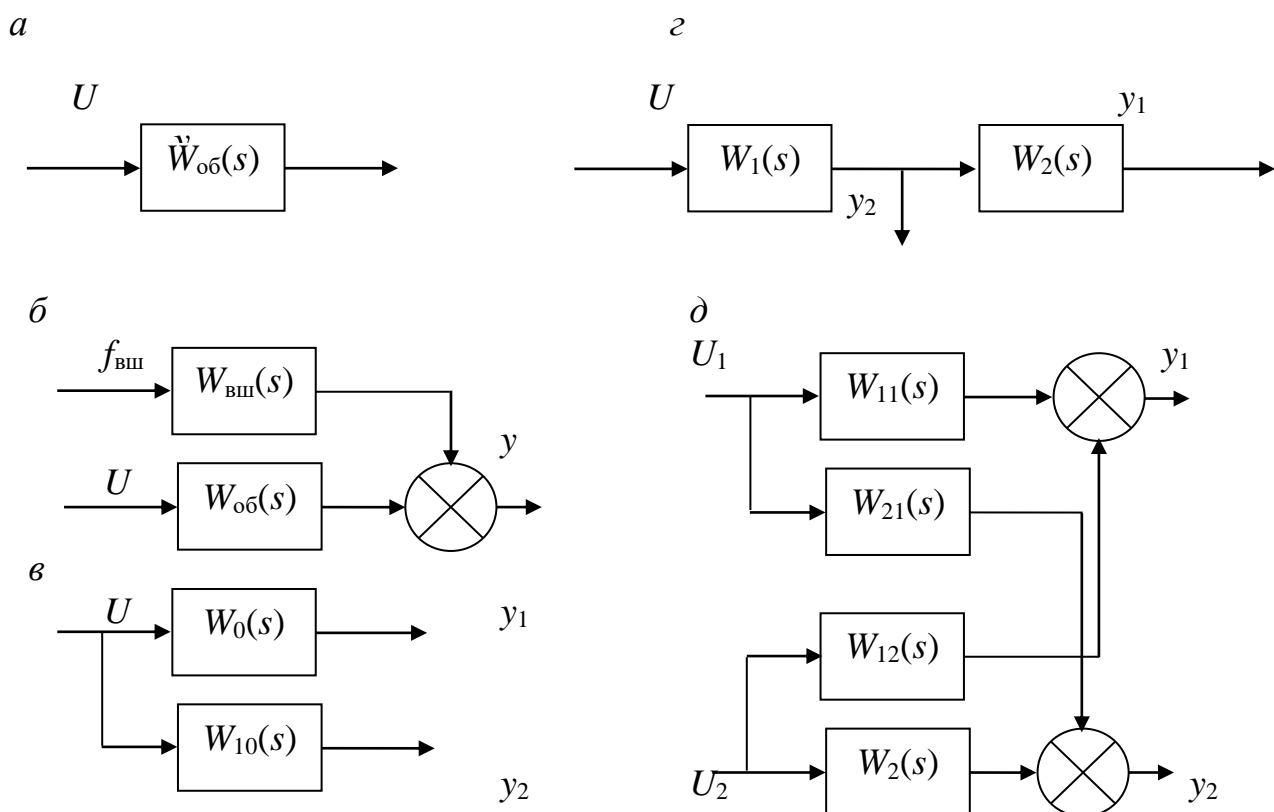


Рис. 1.2. Структурные схемы объектов управления

На рисунках переменной  $U$  обозначено управляющее воздействие на ОУ, которое реализуется с помощью регулирующего органа.

В общем случае между любой парой вход-выход может существовать динамическая связь (канал), которой на структурной схеме САР ставится в соответствие динамическое звено. ПФ такого звена в общем случае имеет вид

$$W_{об}(s) = k_{об} \frac{A(s)}{B(s)} e^{-s\tau_{об}}, \quad (1.4)$$

где  $A(s)$  – полином числителя;  $B(s)$  – полином знаменателя;  $s$  – комплексная переменная преобразования Лапласа  $s = \sigma + j\omega$ ;  $k_{об}$  – коэффициент передачи ОУ;  $\tau_{об}$  – транспортное запаздывание ОУ, с. Как следует из рис. 1.2, ПФ канала ОУ может иметь другие индексы, помимо «об», которые использованы в (1.4).

Полиномы числителя и знаменателя могут быть представлены в одной из трех форм:

$$A(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_{m-1}s^{m-1} + a_ms^m; \quad (1.5)$$

$$B(s) = b_0 + b_1s + \dots + b_{n-1}s^{n-1} + b_ns^n, \quad (1.5')$$

или

$$A(s) = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \dots (s - \alpha_m); \quad (1.6)$$

$$B(s) = (s - \beta_1)(s - \beta_2) \dots (s - \beta_n), \quad (1.6')$$

или

$$A(s) = (T_1^a s + 1)(T_2^a s + 1) \dots (T_m^a s + 1); \quad (1.7)$$

$$B(s) = (T_1^b s + 1)(T_2^b s + 1) \dots (T_n^b s + 1), \quad (1.7')$$

где  $a_i, b_j$  – коэффициенты полиномов;  $\alpha_i, \beta_j$  – корни этих полиномов (в общем случае – комплексные);  $T_i^a, T_j^b$  – постоянные времени, с;  $m, n$  – степени полиномов.

В программном модуле *SIANRG* предусмотрена возможность ввода полиномов числителя и знаменателя в трех перечисленных формах. При переходе от одной формы к другой следует помнить о необходимости корректировки значения коэффициента передачи объекта управления.

Особенности полинома знаменателя ПФ ОУ позволяют разделить ОУ на два класса:

- 1) статические ( $b_0 \neq 0$ );
- 2) астатические ( $b_0 = 0$ ).

Статические ОУ называются также ОУ с самовывравниванием.

Зачастую  $W_{об}(s)$  записывают таким образом, чтобы выполнялись соотношения  $a_m = 1$ ;  $b_n = 1$  или  $a_0 = 1$ ;  $b_0 = 1$ . Для достижения таких соотношений необходимо вынести за скобки значения соответствующих коэффициентов и пересчитать значение  $k_{об}$ .

В некоторых методах расчета САР используют упрощенную форму ПФ для статического ОУ

$$W_{об}(s) = k_{об} \frac{1}{T_{об}s + 1} e^{-s\tau_{об}} \quad (1.8)$$

или для астатического ОУ

$$W_{об}(s) = k_{об} \frac{1}{s} e^{-s\tau_{об}}. \quad (1.9)$$

Коэффициент передачи статического ОУ определяется по формуле

$$k_{об} = \frac{\Delta y}{\Delta U}$$

в рабочей точке регулировочной характеристики ОУ  $y(U)$  и измеряется в единицах выходной величины на процент хода регулирующего органа (РО). Приращения  $\Delta y$  и  $\Delta U$  выбирают вблизи их номинальных значений.

### 1.2.3. Модели регуляторов

Регулятор содержит следующие функциональные элементы САР: суммирующий элемент, блок регулирования, исполнительный механизм, задатчик (если уставки регулятору задает оператор вручную).

Регулирующие блоки САР обеспечивают типовые законы регулирования:

- 1) пропорциональный, или П-регулятор;
- 2) интегральный, или И-регулятор;
- 3) пропорционально-интегральный, или ПИ-регулятор;
- 4) пропорционально-интегрально-дифференциальный, или ПИД-регулятор;

5) пропорционально-дифференциальный, или ПД-регулятор.

Передаточные функции динамических звеньев, соответствующих регулирующим блокам, определяются следующим отношением:

$$R(s) = \frac{U(s)}{\varepsilon(s)},$$

где  $\varepsilon(s)$  – преобразование Лапласа входного сигнала блока регулирования;  $U(s)$  – преобразование Лапласа выходного сигнала этого блока. ПФ регуляторов задают с использованием двух типов параметров, что приводит к двум формам их представления: форма 1 и форма 2.

ПФ регуляторов в форме 1 имеют следующий вид:

для П-регулятора  $R(s) = k_p;$  (1.10)

для ПИ-регулятора  $R(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_{\text{и}}s} \right);$  (1.11)

для ПИД-регулятора  $R(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_{\text{и}}s} + T_{\text{д}}s \right),$  (1.12)

или  $R(s) = \frac{k_p T_{\text{и}} T_{\text{д}} s^2 + k_p T_{\text{и}} s + k_p}{T_{\text{и}} s};$  (1.12')

для И-регулятора  $R(s) = k_{\text{рл}} \frac{1}{s};$  (1.13)

для ПД-регулятора  $R(s) = k_p (1 + T_{\text{д}}s).$  (1.14)

В этих формулах использованы следующие параметры:  $k_p$  – коэффициент передачи регулятора в процентах хода РО на единицу регулируемой величины (так как выходная величина регулятора – ход исполнительного механизма – обычно равна входной величине ОУ – ходу регулирующего органа);  $T_{\text{и}}$  – постоянная интегрирования (время изотропа), с;  $T_{\text{д}}$  – постоянная дифференцирования (время предварения), с. Для И-регулятора  $T_{\text{и}} = 1$ , а коэффициент передачи  $k_{\text{рл}}$  измеряется в процентах хода РО на единицу регулируемой величины за секунду. В серийно выпускаемых регулирующих блоках перечисленные параметры передаточных функций необходимо настраивать в зависимости

от динамических свойств ОУ. По этой причине такие параметры называются настройками регуляторов.

Сигнал на выходе ПИД-регулятора описывается формулой

$$U(t) = k_p \varepsilon(t) + \frac{k_p}{T_{\text{и}}} \int_0^t \varepsilon(\eta) d\eta + k_p T_{\text{д}} \frac{d\varepsilon(t)}{dt}.$$

ПФ регуляторов в форме 2 (в  $C$ -параметрах) имеют следующий вид:

для П-регулятора  $R(s) = C_1;$  (1.15)

для PI-регулятора  $R(s) = C_1 + \frac{C_0}{s};$  (1.16)

для ПИД-регулятора  $R(s) = C_1 + \frac{C_0}{s} + C_2 s,$  (1.17)

или  $R(s) = \frac{C_2 s^2 + C_1 s + C_0}{s}.$  (1.17')

В этих формулах использованы следующие параметры:  $C_1$  – коэффициент пропорциональной составляющей;  $C_0$  – коэффициент интегральной составляющей;  $C_2$  – коэффициент дифференциальной составляющей. Перечисленные коэффициенты являются настройками регулятора. Для  $C$ -параметров сигнал на выходе ПИД-регулятора связан с сигналом ошибки следующим выражением:

$$U(t) = C_1 \varepsilon(t) + C_0 \int_0^t \varepsilon(\eta) d\eta + C_2 \frac{d\varepsilon(t)}{dt}.$$

Настройки разных типов взаимосвязаны формулами

$$\begin{aligned} C_1 &= k_p; & C_0 &= \frac{k_p}{T_{\text{и}}}; & C_2 &= k_p T_{\text{д}}; \\ T_{\text{и}} &= \frac{C_1}{C_0}; & T_{\text{д}} &= \frac{C_2}{C_1}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

В программном модуле ПФ ПД- и ПИД-регуляторов рассчитываются с физически реализуемыми дифференциальными составляющими

$$\frac{T_{\text{д}} s}{0,25 T_{\text{д}} s + 1} = \frac{C_1 C_2 s}{0,25 C_2 s + C_1} \quad (1.19)$$

вместо физически нереализуемых составляющих  $T_{\text{д}} s$  и  $C_2 s$ .

Правая часть равенства (1.19) выведена на основании соотношения (1.18) для  $T_d$ . С учетом указанных составляющих ПФ ПИД-регулятора имеет вид

$$R(s) = \frac{1,25k_p T_d s^2 + k_p (0,25T_d + T_i)s + k_p}{0,25T_i T_d s^2 + T_i s}, \quad (1.20)$$

или

$$R(s) = \frac{1,25C_1 C_2 s^2 + (0,25C_0 C_2 + C_1^2)s + C_0 C_1}{0,25C_2 s^2 + C_1 s}. \quad (1.21)$$

Для ПД-регулятора с учетом (1.19) можно найти следующие ПФ:

$$R(s) = \frac{1,25k_p T_d s^2 + k_p}{0,25T_d s + 1}, \text{ или } R(s) = \frac{1,25C_1 C_2 s + C_1^2}{0,25C_2 s + C_1}.$$

Формулы (1.20), (1.21) были использованы в программном модуле, формирующем коэффициенты передаточных функций регулирующих блоков по введенным настройкам.

#### 1.2.4. Показатели качества САР

Целью моделирования САР является создание системы, удовлетворяющей определенным требованиям, которые формулируются в виде качественных показателей. Качество функционирования САР определяется по переходной характеристике (ПХ)  $h(t)$  – реакции системы на типовое воздействие в виде единичной ступенчатой функции  $1(t)$  – или некоторыми параметрами ПФ замкнутой системы. Ниже перечислены показатели качества, применяемые при моделировании и проектировании САР. Обозначения, используемые в формулах, пояснены на рис. 1.3 и 1.4.

Максимальное динамическое отклонение по управлению в единицах регулируемой величины

$$\sigma = h_{\max l}^g - h_{\text{уст}}^g. \quad (1.22)$$

Максимальное динамическое отклонение по возмущению в единицах регулируемой величины

$$\sigma = h_{y1}^f. \quad (1.23)$$

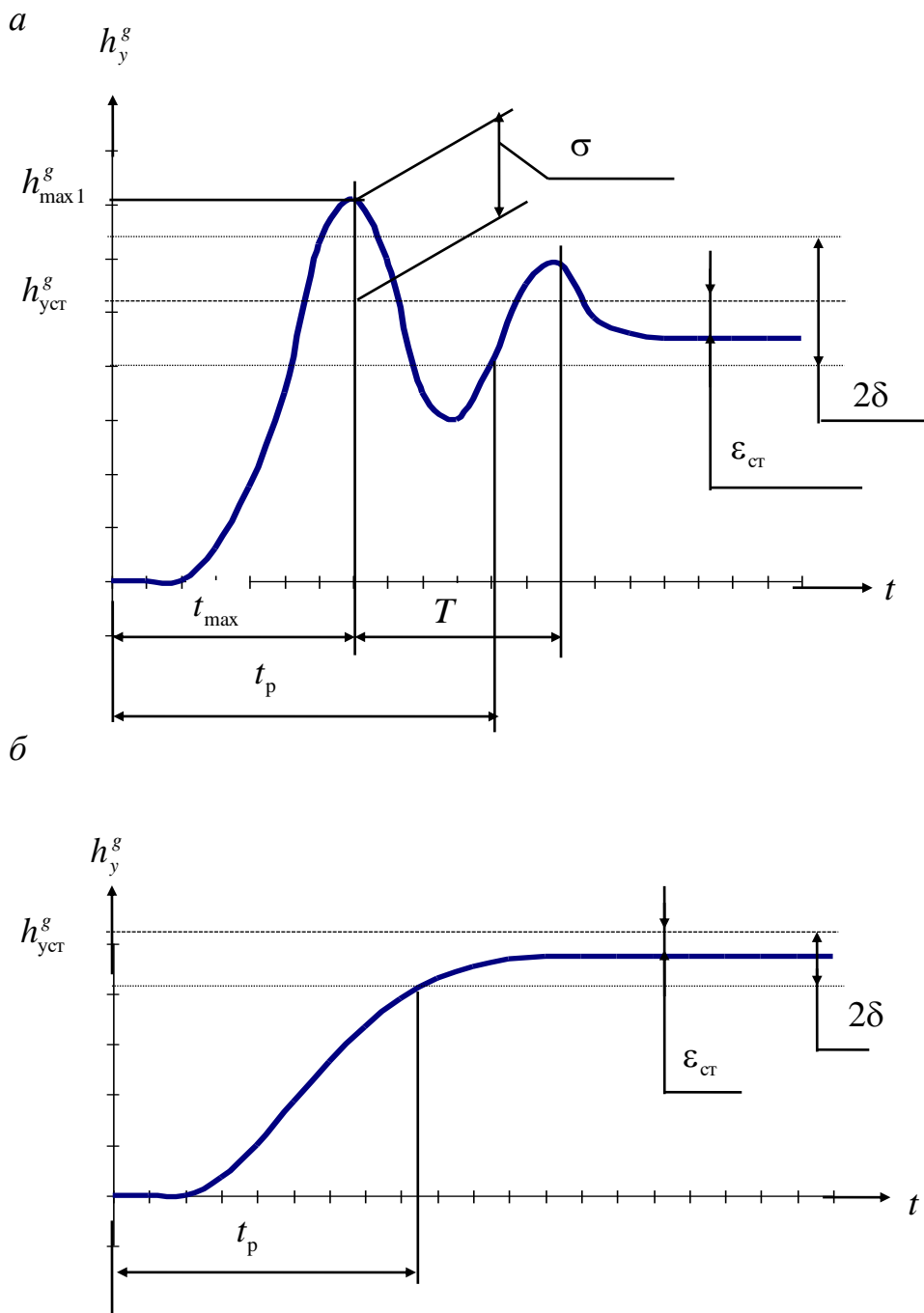


Рис. 1.3. Переходные процессы по управлению:

*a* – колебательный процесс; *б* – аperiodический процесс

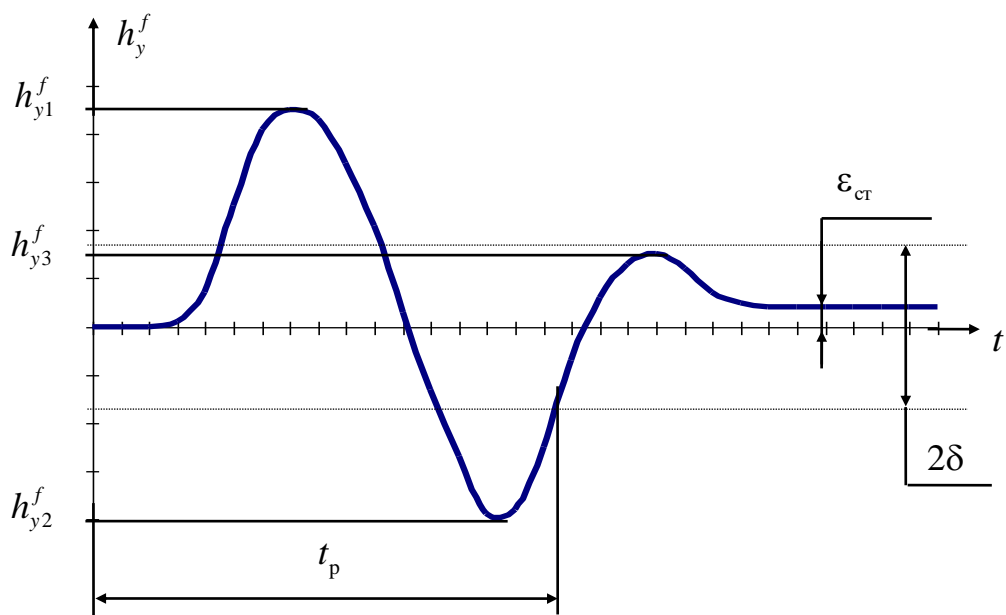
Время регулирования  $t_p$  в секундах определяется при условии, когда сигнал зашел и больше не выходит из  $\delta$ -трубки, относительно установившегося значения, где  $\delta = 5\%$ .

Перерегулирование в процентах по управлению

$$\eta = 100 \left( h_{\max}^g - h_{\text{уст}}^g \right) / h_{\text{уст}}^g . \quad (1.24)$$



*a*



*б*

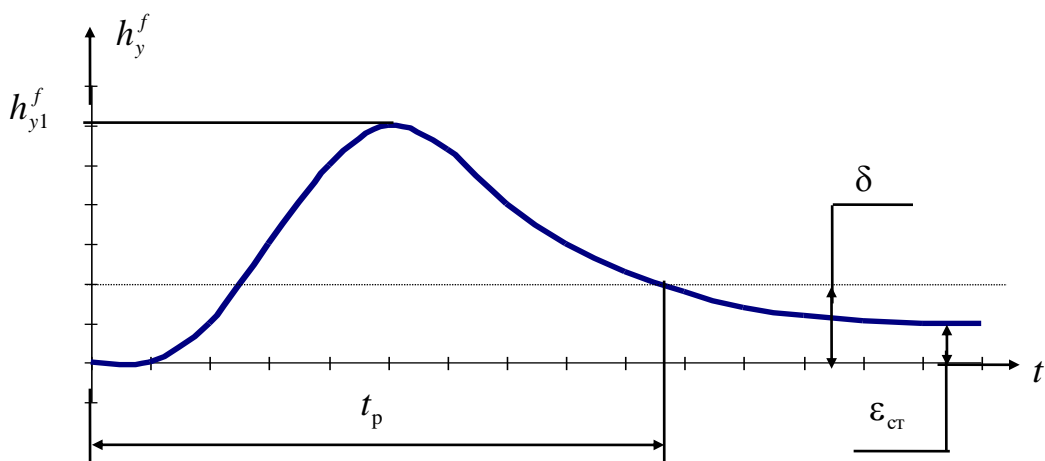


Рис. 1.4. Переходные процессы по возмущению:  
*a* – колебательный процесс; *б* – аperiodический процесс

Перерегулирование в процентах по возмущению

$$\eta = 100 h_{y2}^f / h_{y1}^f. \quad (1.25)$$

Статическая ошибка  $\epsilon_{ст}$  – в единицах регулируемой величины.

Частота колебаний  $\omega = 2\pi/T$ .

Время достижения первого максимума  $t_{max}$ .

Степень колебательности

$$m = \frac{\alpha}{\omega},$$

где  $\alpha$  и  $\omega$  – вещественная и мнимая части корней характеристического уравнения замкнутой САР, наиболее близко расположенных к мнимой оси.

Показатель колебательности  $M$ , определяемый как

$$M = \frac{A_{\max}(\omega_p)}{A(0)},$$

где  $A_{\max}(\omega_p)$  – максимум АЧХ (амплитудно-частотной характеристики) замкнутой САР на резонансной  $\omega_p$  или рабочей частоте;  $A(0)$  – значение этой характеристики при нулевой частоте.

Интегральный квадратичный критерий качества

$$I = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt, \quad (1.26)$$

где  $\varepsilon(t)$  – динамическая составляющая ошибки (без статической ошибки  $\varepsilon_{ст}$ ).

Запасы устойчивости по амплитуде и фазе  $\Delta A_0$ ,  $\Delta \varphi$ , которые определяются по амплитудно-фазовой частотной характеристике (АФЧХ) разомкнутой САР, не нашли применения при проектировании САР в промышленности.

Степень затухания переходного процесса по возмущению

$$\psi = \frac{h_{y1}^f - h_{y3}^f}{h_{y1}^f}. \quad (1.27)$$

Первые шесть оценок относятся к прямым, так как они определяются непосредственно по ПХ. Остальные показатели являются косвенными оценками качества.

В ряде случаев качество САР задается типовым переходным процессом. Рассматривают три типовые ПХ:

- 1) апериодическая;
- 2) с 20 %-ным перерегулированием;
- 3) с минимумом интегрального квадратичного критерия

$$\min I = \min \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt. \quad (1.28)$$

### 1.2.5. Синтез регуляторов методом Циглера-Никольса

Синтез регулятора относится к этапу составления модели САР. Метод Циглера-Никольса, или метод незатухающих колебаний, применим для расчета САР с ОУ, передаточная функция которого задана полиномами произвольных степеней. В этом методе синтеза передаточную функцию блока регулирования следует представить в форме 2, или в  $S$ -параметрах.

Известно из критерия Найквиста, что если АФЧХ разомкнутой САР проходит через точку  $(-1, j0)$  комплексной плоскости, то система находится на границе устойчивости. В таком случае при  $R(s) = C_1^{кр}$  можно записать равенство

$$W_{рс}(j\omega) = W_{об}(j\omega)C_1^{кр} = W(j\omega) = -1,$$

которое в показательной форме имеет вид

$$A_{об}(\omega_{кр})e^{j\varphi(\omega_{кр})}C_1^{кр} = -1, \quad (1.29)$$

где  $A_{об}(\omega_{кр})$  – безразмерная амплитудная частотная характеристика объекта управления;  $\varphi(\omega_{кр})$  – фазовая частотная характеристика ОУ.

Последнее равенство распадается на два уравнения:

$$\varphi(\omega_{кр}) = \pi \quad \text{и} \quad A_{об}(\omega_{кр})C_1^{кр} = 1, \quad (1.30)$$

откуда следует

$$C_1^{кр} = \frac{1}{A_{об}(\omega_{кр})}. \quad (1.31)$$

Этот метод применим только к тем САР, в которых имеется звено чистого запаздывания, или для систем, у которых АФЧХ разомкнутой САР пересекает отрицательную вещественную полуось.

В методе Циглера-Никольса расчет настроек регуляторов проводят в несколько этапов.

**Этап 1.** Определение критической частоты  $\omega_{кр}$  из (1.30), на которой фазовый угол АФЧХ объекта управления равен  $180^\circ$  (рис. 1.5).

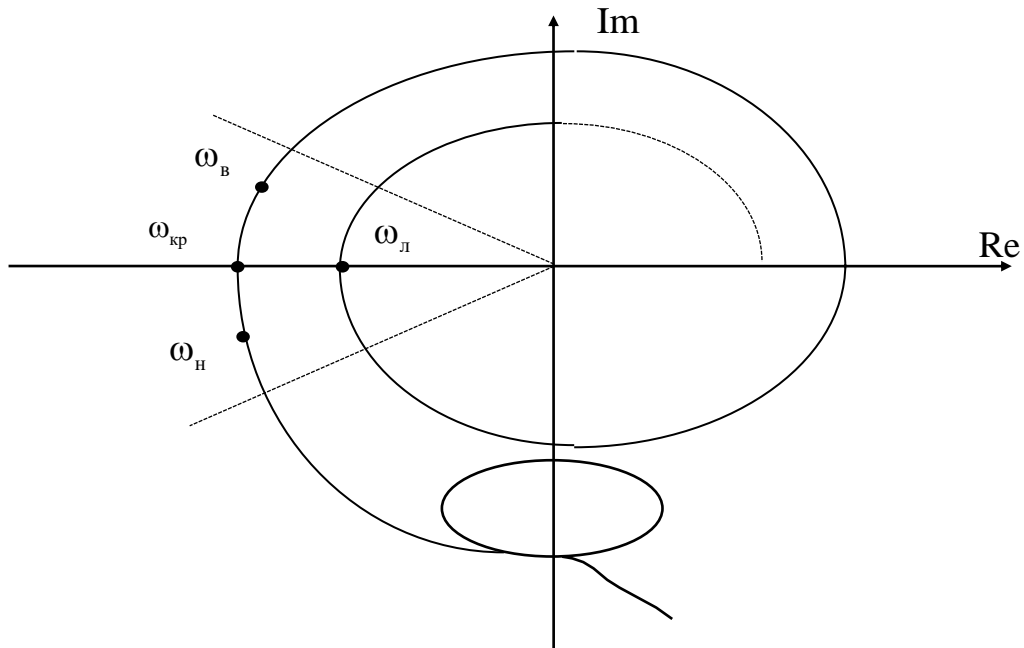


Рис. 1.5. АФЧХ ОУ и ее характерные точки в методе Циглера-Никольса

Условие  $\varphi(\omega) = \pi$  выполняется на многих частотах, так как звено чистого запаздывания обуславливает спиралевидный характер АФЧХ при возрастании частоты. Критической частотой  $\omega_{кр}$  будет наименьшая из этих частот. Остальные частоты будут ложными  $\omega_{л}$  (см. рис. 1.5). Данное свойство необходимо учитывать при выборе  $\omega_{кр}$ .

В программном модуле *SIANRG* частота  $\omega_{кр}$  определяется в режиме интерактивного взаимодействия пользователя с программой. При этом пользователь выбирает нижнюю  $\omega_{н}$  и верхнюю  $\omega_{в}$  частоты (см. рис. 1.5).

Программа для этих частот определяет фазовую частотную характеристику (ФЧХ)  $\varphi_{рс}(\omega)$  разомкнутой САР. Если ФЧХ удовлетворяет неравенствам

$$-180^\circ < \varphi_{рс}(\omega_{н}) < -155^\circ, \quad (1.32)$$

$$155^\circ < \varphi_{рс}(\omega_{в}) < 180^\circ, \quad (1.33)$$

то вычисляется критическая частота  $\omega_{кр}$  методом половинного деления. Для предварительной оценки критической частоты можно воспользоваться графиком (рис. 1.6).

**Этап 2.** Вычисление на частоте  $\omega_{кр}$  значения амплитудной характеристики  $A_{об}(\omega_{кр})$  и критической настройки  $C_1^{кр}$  по формуле (1.31).

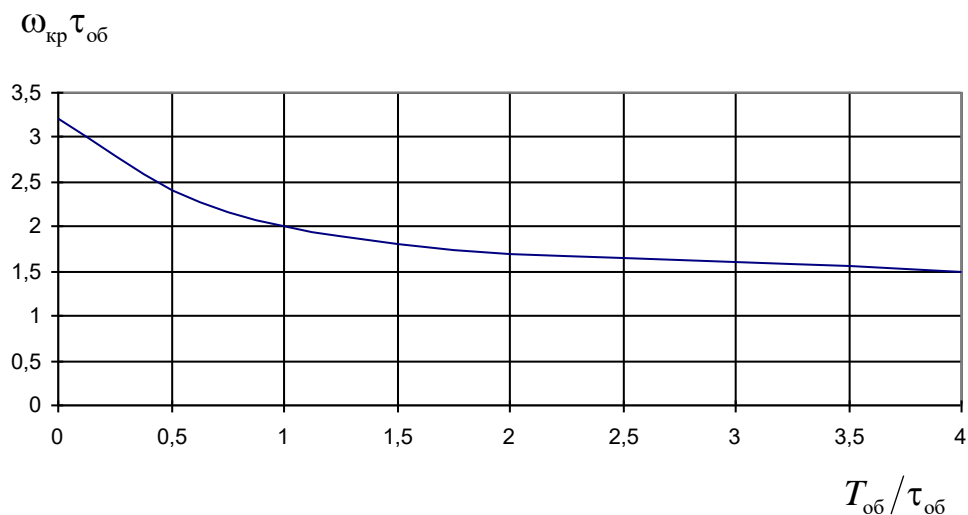


Рис. 1.6. Кривая предварительного выбора критической частоты

**Этап 3.** Вычисление настроек регулятора по формулам:

а) для П-регулятора

$$C_1^* = 0,5C_1^{кр}; \quad (1.34)$$

б) для ПИ-регулятора

$$C_1^* = 0,45C_1^{кр}; \quad (1.35)$$

$$C_0^* = 0,086C_1^{кр}\omega_{кр}; \quad (1.36)$$

в) для ПИД-регулятора

$$C_1^* = 0,6C_1^{кр}; \quad (1.37)$$

$$C_0^* = 0,192C_1^{кр}\omega_{кр}; \quad (1.38)$$

$$C_2^* = 0,471 \frac{C_1^{кр}}{\omega_{кр}}. \quad (1.39)$$

Недостатком метода Циглера-Никольса является то, что он обеспечивает лишь один тип переходного процесса – с затуханием  $\psi = 0,8 - 0,9$ .

Другим недостатком метода Циглера-Никольса является ограниченный набор типов законов регулирования (П, ПИ, ПИД).

### 1.2.6. Моделирование одноконтурной САР в частотной области

Анализ САР в частотной области имеет следующие цели:

- 1) оценить устойчивость замкнутой САР по АФЧХ разомкнутой САР  $W_{pc}(j\omega)$ ;
- 2) найти частоту первого нуля  $\omega_{p1}$  вещественной частотной характеристики замкнутой САР, необходимую для построения переходного процесса.

В программном модуле *SIANRG* проверка устойчивости одноконтурной САР производится по критерию Найквиста, формулировка которого для одноконтурной САР со статическим ОУ гласит, что АФЧХ  $W_{pc}(j\omega)$  устойчивой системы в разомкнутом состоянии не охватывает точку  $(-1, j0)$ , т. е. пересекает вещественную полуось справа от этой точки.

При анализе системы в частотной области вычисления производятся по формулам частотных передаточных функций разомкнутой САР:

$$W_{pc}(j\omega) = W_{об}(j\omega)R(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega); \quad (1.40)$$

замкнутой САР при подаче задающего (управляющего) сигнала на вход  $g$ :

$$W_{yg}(j\omega) = \frac{W_{об}(j\omega)R(j\omega)}{1 + W_{об}(j\omega)R(j\omega)} = \frac{W_{pc}(j\omega)}{1 + W_{pc}(j\omega)}, \quad (1.41)$$

или

$$W_{yg}(j\omega) = A_{yg}(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = P_{yg}(\omega) + jQ_{yg}(\omega); \quad (1.42)$$

замкнутой САР при подаче возмущающего сигнала на вход  $f$ :

$$W_{yf}(j\omega) = \frac{W_{об}(j\omega)}{1 + W_{об}(j\omega)R(j\omega)} = \frac{W_{об}(j\omega)}{1 + W_{pc}(j\omega)}, \quad (1.43)$$

или

$$W_{yf}(j\omega) = A_{yf}(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = P_{yf}(\omega) + jQ_{yf}(\omega). \quad (1.44)$$

Программа вычисляет на частоте  $\omega_i$  значения  $W_{об}(j\omega_i)$ ,  $R(j\omega_i)$  по формулам соответствующих ПФ, после чего эти значения подставляются в формулы (1.40), (1.41), (1.43). При таком подходе программа не может рассчитать АФЧХ

$R(j\omega)$  для  $\omega = 0$ , если в ПФ регулятора существует интегрирующая составляющая. В этом случае необходимо использовать предельные переходы

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} W_{yg}(j\omega) = 1; \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} W_{yf}(j\omega) = 0. \quad (1.45)$$

Частоты  $\omega_i$  в программе можно задавать произвольными дискретными значениями или диапазоном  $(\omega_{\min}, \omega_{\max})$  с числом частот  $N_f$  внутри диапазона и видом интерполяции. Программа обеспечивает линейную и логарифмическую интерполяции, задаваемые соответственно формулами

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{N_f - 1}; \quad \omega_{i+1} = \omega_i 10^{(\omega_{\max} - \omega_{\min}) / (N_f - 1)}.$$

Параметры частотного диапазона в программе вводятся в режиме диалога, причем возможна многократная модификация всех данных. Логарифмическая интерполяция применяется при исследовании АФЧХ в значительном диапазоне частот ( $\omega_{\min}/\omega_{\max} > 100$ ).

#### 1.2.7. Моделирование одноконтурной САР во временной области

После исследования САР на устойчивость необходимо оценить качество устойчивой САР. Для этого следует построить переходный процесс, вызванный единичным скачком по каналам задания и возмущения.

Вычисление переходного процесса в программном модуле основано на формулах численного интегрирования.

Интервал времени, на котором производится расчёт  $h(t)$ , определяется введенными пользователем в программу значениями начала ( $T_{\min}$ ) и конца ( $T_{\max}$ ) временного интервала. Этот интервал и количество точек переходного процесса  $N_f$  необходимо выбирать в интерактивном режиме, чтобы не потерять характерные колебания переходного процесса на начальных участках. Наибольшее значение  $T_{\max}$  следует задавать до  $10-20\tau_{об}$ .

### 1.3. Описание работы программного модуля *SIANRG* для синтеза и анализа САР в частотной области

Моделирование в программном модуле *SIANRG* начинается с *Главного меню* (рис. 1.7), в котором имеются основные меню: *Файл*, *Синтез*, *Анализ*, *Отчеты*, *Помощь*.

Панель инструментов содержит кнопки для аналогичной основной работы пользователя: *Создать*, *Открыть*, *Сохранить*, *Синтез*, *Анализ*, *Помощь*.

Меню *Файл* содержит традиционные опции для работы с данными в виде файлов в формате \*.dat: *Создать*, *Открыть*, *Сохранить*, *Сохранить как...*, *Закрыть*.

Меню *Синтез* (рис. 1.8) содержит опции, позволяющие последовательно проводить синтез САР: задание параметров объекта (рис. 1.9, 1.10), расчет критической настройки регулятора (рис. 1.11, 1.12, 1.13), расчет оптимальных параметров регуляторов (рис. 1.14).

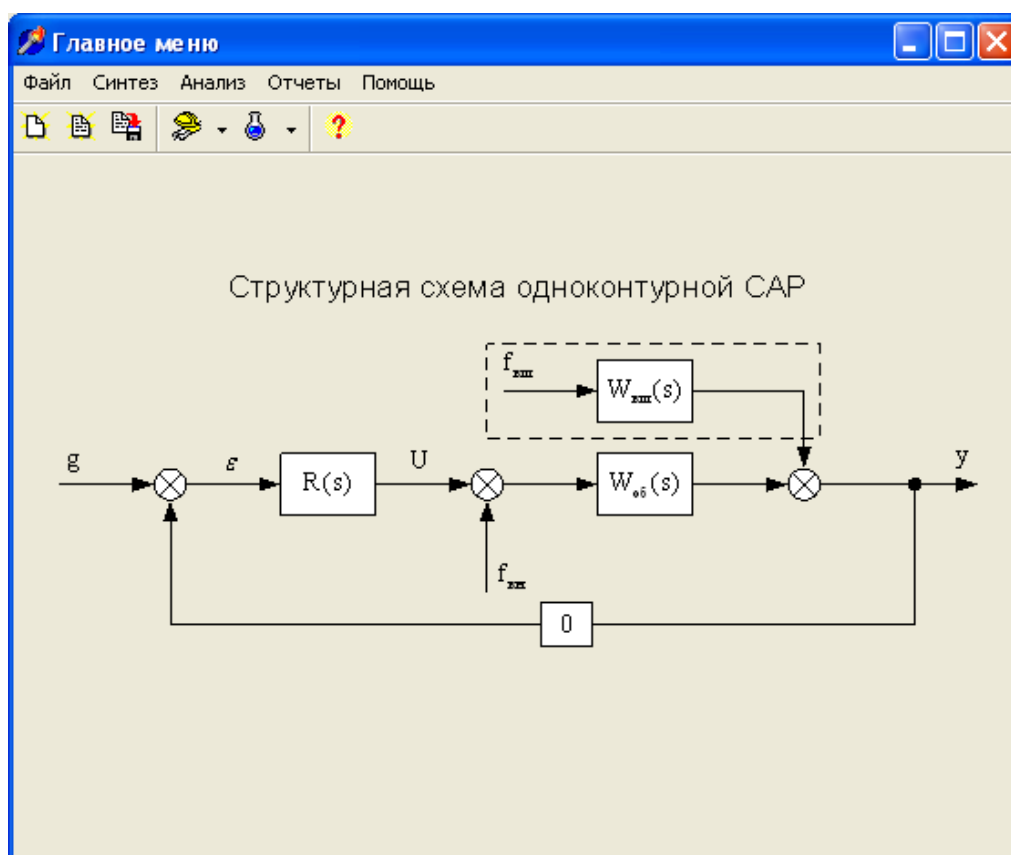


Рис. 1.7. Главное меню программного модуля *SIANRG*



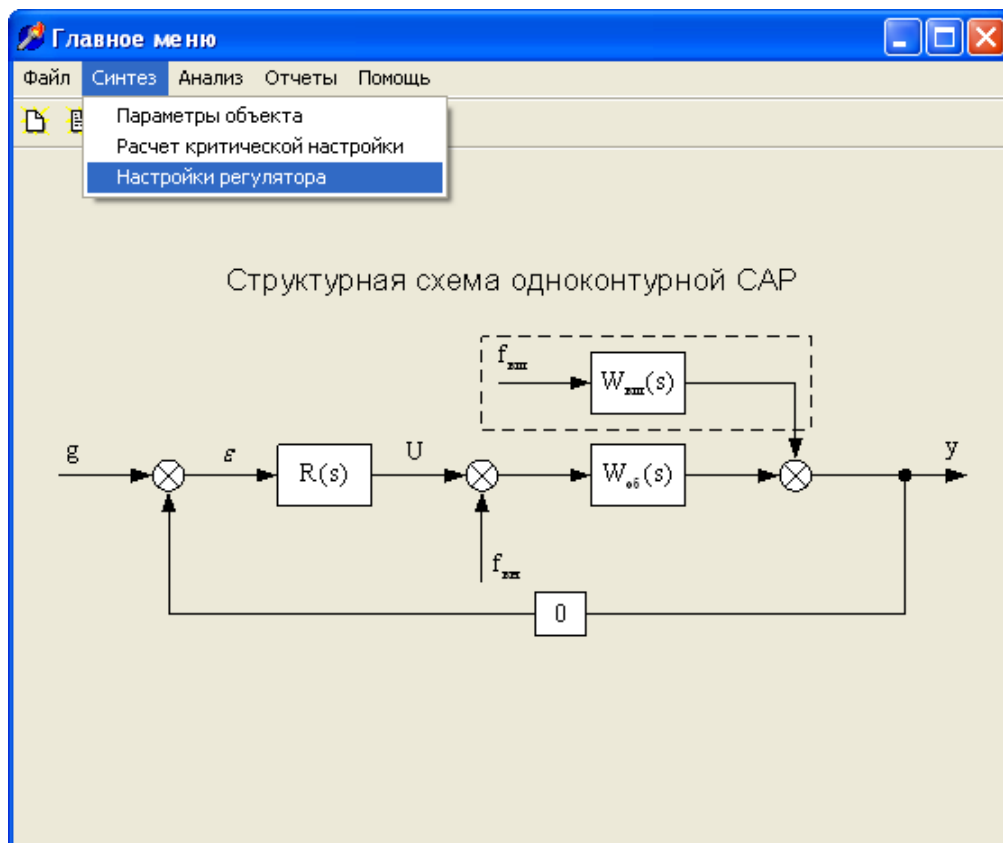


Рис. 1.8. Меню *Синтез САП*

Ввод передаточной функции объекта

Коэффициент усиления: 0.5

Транспортное запаздывание: 7

Числитель | Знаменатель

Тип параметров

- ☒ Коэффициентами
- ☐ Корнями
- ☐ Постоянными времени

№ параметра: 0

Добавить

Удалить

Параметр

Веществ. часть: 1

Применить

Отменить

Передаточная функция ОУ:

$$W_{об}(p) = 0.5 \cdot \frac{1}{(24 \cdot p + 1)} \cdot \exp(-p \cdot 7)$$

Рис. 1.9. Задание параметров объекта – ввод ПФ ОУ (числителя)

Рис. 1.10. Задание параметров объекта – ввод ПФ ОУ (знаменателя)

Для задания параметров ПФ ОУ выберите в главном меню пункт: *Синтез / Параметры объекта*. Перемещаться между компонентами можно с помощью клавиши *Tab* или с помощью мыши (подвести курсор к нужному компоненту и нажать левую клавишу мыши).

#### *Этапы задания передаточной функции объекта управления*

1. Задайте коэффициент усиления передаточной функции (ПФ) объекта управления (ОУ)  $k_{об}$ .
2. Задайте коэффициент транспортного запаздывания ПФ ОУ  $\tau_{об}$ .
3. Задайте числитель ПФ ОУ (см. рис. 1.9). Для этого выберите тип задания параметров числителя. Если необходимо задать два и больше параметров, то нажмите на кнопку *Добавить* столько раз, сколько имеется параметров за минусом 1, а затем, выбирая параметр с нужным порядковым номером, задаются его значения (если тип задания параметров задан корнями, то записывается вещественная и мнимая части корня, в других случаях – только вещественная часть параметра – постоянная времени или коэффициент полинома). При моде-

лировании простейшей одноконтурной САР числитель ПФ задается коэффициентом полинома, равным 1; номер параметра равен 0.

4. Если добавлен лишний параметр или необходимо отредактировать ПФ для меньшего числа параметров, выберите подлежащий удалению порядковый номер параметра и нажмите кнопку *Удалить* (удаляется текущий параметр).

5. Задайте знаменатель ПФ ОУ (см. рис. 1.10), руководствуясь пунктами 3 и 4. При моделировании простейшей одноконтурной САР знаменатель ПФ ОУ задается постоянной времени объекта  $T_{об}$ ; номер параметра равен 0.

6. Все действия по заданию параметров сразу отображаются внизу окна, где представлена ПФ ОУ, соответствующая введенным данным (пункты 1, 2, 3 и 5).

7. Если все задано верно, то для запоминания введенных данных нажмите кнопку *Применить*, в противном случае – кнопку *Отмена* (это приведет к потере изменений в данных, т.е. ПФ ОУ не изменится).

Расчет критической настройки регулятора осуществляется в режиме интерактивного взаимодействия пользователя с программой в несколько этапов. На этапе поиска (рис. 1.11) предварительно оценивается критическая частота  $\omega_{кр}$ . Рекомендуется начинать производить оценку с задания нижней частоты  $\omega_n$ , равной 0,1, верхней частоты  $\omega_v$  – 0,2; далее нажмите кнопку *Расчет*. Если при этом критическая частота не попадает в нужный диапазон ((1.32)–(1.33) и см. рис. 1.5), то на экране появится сообщение *Диапазон частот задан неправильно* (рис. 1.12). Далее с шагом 0,1 задается снова нижняя (например, 0,2) и верхняя частоты (например, 0,3). и т. д. до тех пор, пока не будут определены критическая частота и критическая настройка регулятора (рис. 1.13). При задании нового диапазона частот обязательно нажимайте кнопку *Расчет*.

Для запоминания рассчитанных данных нажмите кнопку *Применить*, в противном случае – кнопку *Отмена* (это приведет к потере вновь рассчитанных данных, т. е. критическая настройка регулятора не изменится).

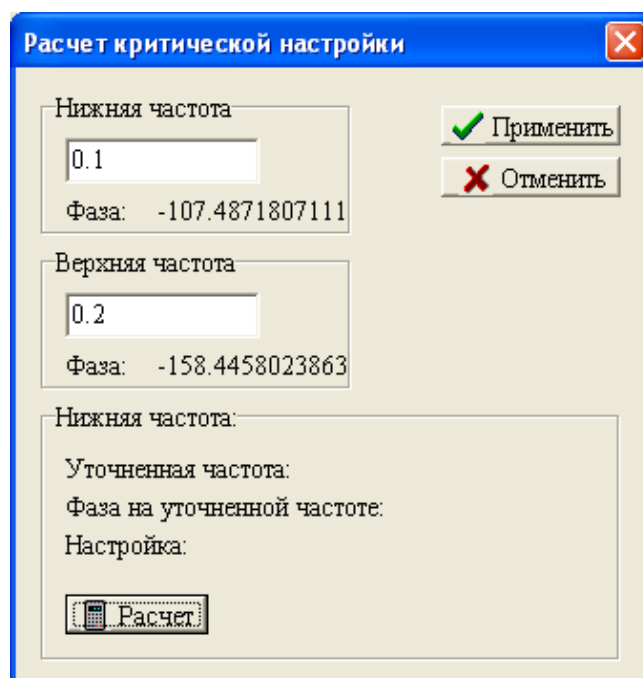


Рис. 1.11. Расчет критической настройки регулятора: этап поиска

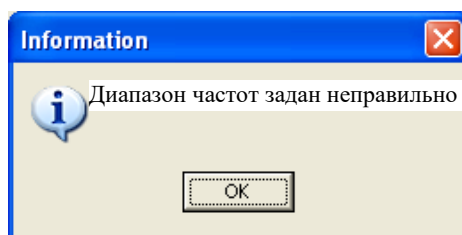


Рис. 1.12. Расчет критической настройки регулятора: информация пользователю

Расчет оптимальных параметров регулятора (рис. 1.14) можно произвести для формы 1 (1.10)–(1.12.) или формы 2 (1.15)–(1.17) для каждого регулятора (П, ПИ, ПИД) отдельно. Выбрав форму задания параметров регулятора и вид регулятора, необходимо нажать кнопку *Оптимальные настройки*. Для запоминания рассчитанных данных нажмите кнопку *Применить*, в противном случае – кнопку *Отмена* (это приведет к потере вновь рассчитанных данных, т. е. оптимальные настройки регулятора не изменятся).

Меню *Анализ* (рис. 1.15) содержит опции, позволяющие последовательно проводить анализ ОУ, разомкнутой САР в частотной и временной областях, замкнутой САР по управлению и возмущению (также в частотной и временной областях).

В данном параграфе (для лабораторной работы №1) рассмотрим анализ разомкнутой САР в частотной области согласно заданному плану эксперимента.

**Расчет критической настройки**

Нижняя частота: 0.2  
Фаза: -158.4458023863

Верхняя частота: 0.3  
Фаза: -202.4139742745

Нижняя частота:  
Уточненная частота: 0.2481628418  
Фаза на уточненной частоте: -179.9996927188  
Настройка: 12.0785499997

Расчет

Применить  
Отменить

Рис. 1.13. Расчет критической настройки регулятора: заключительный этап

**Параметры регулятора**

Тип параметров:  
☐ Форма 1  
☒ Форма 2

Оптимальные настройки

П | ПИ | ПИД

Кр: 6.039274999

Передаточная функция регулятора:  
 **$W_{per}(p) = 6.0392749999$**

Применить  
Отменить

Рис. 1.14. Расчет оптимальных параметров П-регулятора

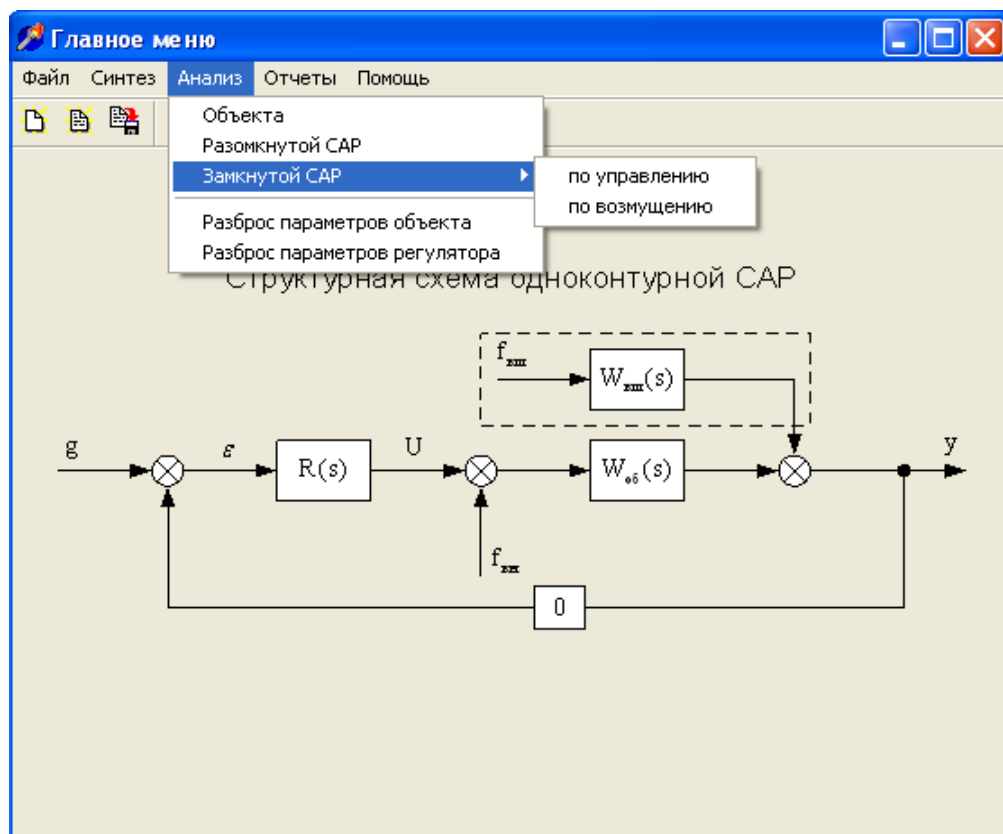


Рис. 1.15. Меню *Анализ*

Анализ устойчивости разомкнутой САР в частотной области (рис. 1.16) осуществляется по АФЧХ согласно критерию Найквиста. Необходимо так задать настройки нижней и верхней частот, чтобы просмотреть АФЧХ системы в разомкнутом состоянии в районе точки  $(-1, j0)$ . Напоминаем, что если АФЧХ пересекает вещественную полуось справа от этой точки, то система устойчива. После задания настроек необходимо нажать кнопку *Расчет*. Во время анализа устойчивости разомкнутой САР в частотной области необходимо сразу сохранять график АФЧХ в формате \*.grs (рис. 1.17). Запомните значения оси абсцисс (точку пересечения АФЧХ с осью), это позволит в дальнейшем правильно идентифицировать графики при их наложении для отчета.

При анализе устойчивости разомкнутой САР в частотной области не рекомендуется менять настройки нижней и верхней частот, иначе в дальнейшем могут возникнуть трудности с наложением графиков.

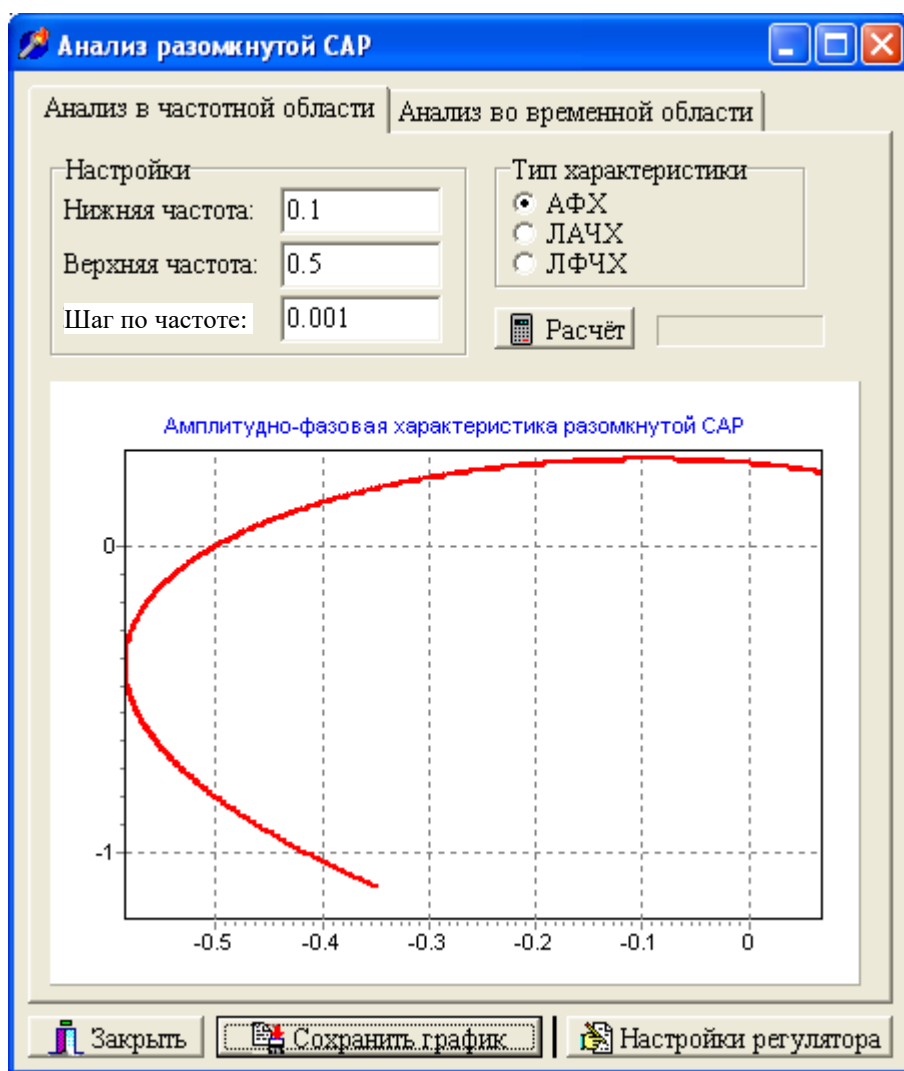


Рис. 1.16. Анализ разомкнутой САР в частотной области

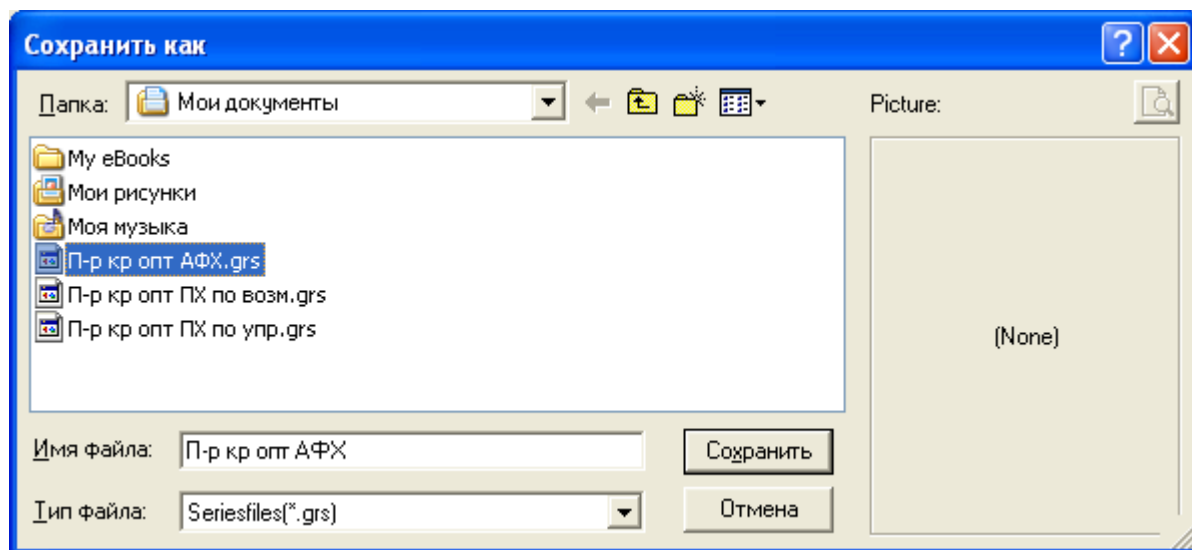


Рис. 1.17. Сохранение графика АФЧХ разомкнутой САР при анализе в частотной области

Анализируя устойчивость и качество функционирования САР, необходимо изменять настройки регулятора. Для этого в окнах *Анализа САР* (см. рис. 1.16) достаточно нажать кнопку *Настройки регулятора*, и пользователь попадает в окно *Параметры регулятора* (см. рис. 1.14). Далее, выбирая тип регулятора, необходимо согласно плану однофакторного эксперимента изменить соответствующую настройку, т. е. ввести новое ее значение (рис. 1.18) и обязательно нажать кнопку *Применить* (см. рис. 1.18а), иначе в памяти программы остается старое значение (рис. 1.18).

После этого программа автоматически возвращается в окно *Анализ САР*. Нажмите кнопку *Расчет*, не меняя настройки нижней и верхней частот для просмотра графиков, и получите новые результаты анализа соответствующей САР (рис. 1.19). Не забывайте сразу сохранять графики в формате \*.grs.

Затем задайте значение настройки для системы с П-регулятором  $k_p^0 - \Delta k_p$  (рис. 1.20) и проанализируйте разомкнутую САР в частотной области (рис. 1.21). Сохраните графики в формате \*.grs.

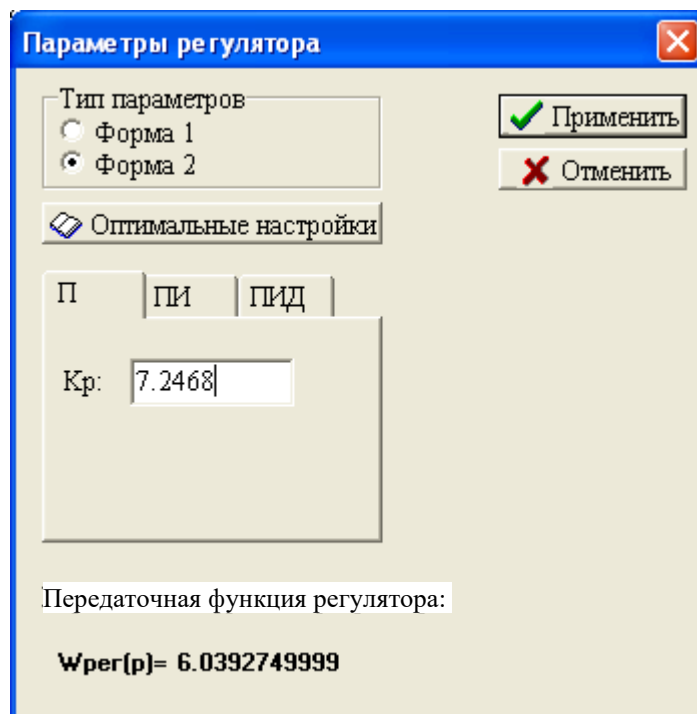


Рис. 1.18. Изменение настройки регулятора: ввод нового значения



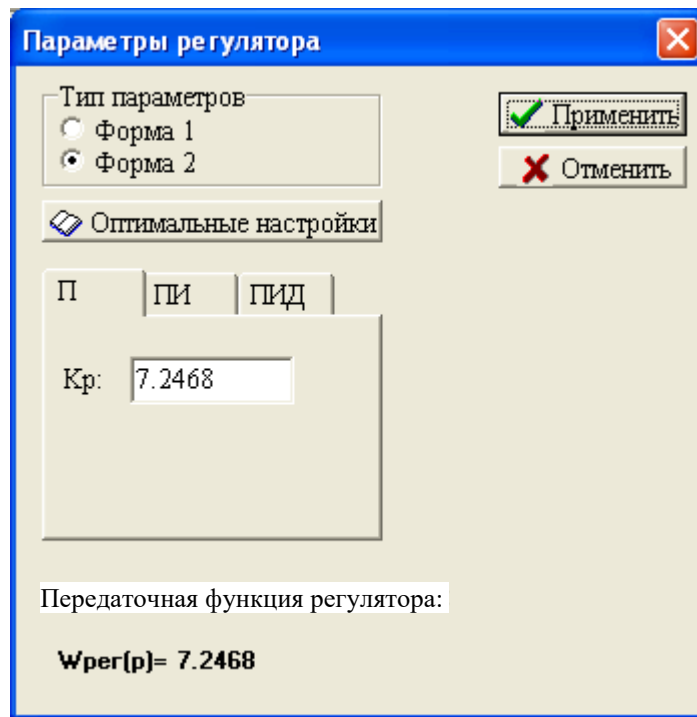


Рис. 1.18а. Изменение настройки регулятора: после нажатия кнопки *Применить*

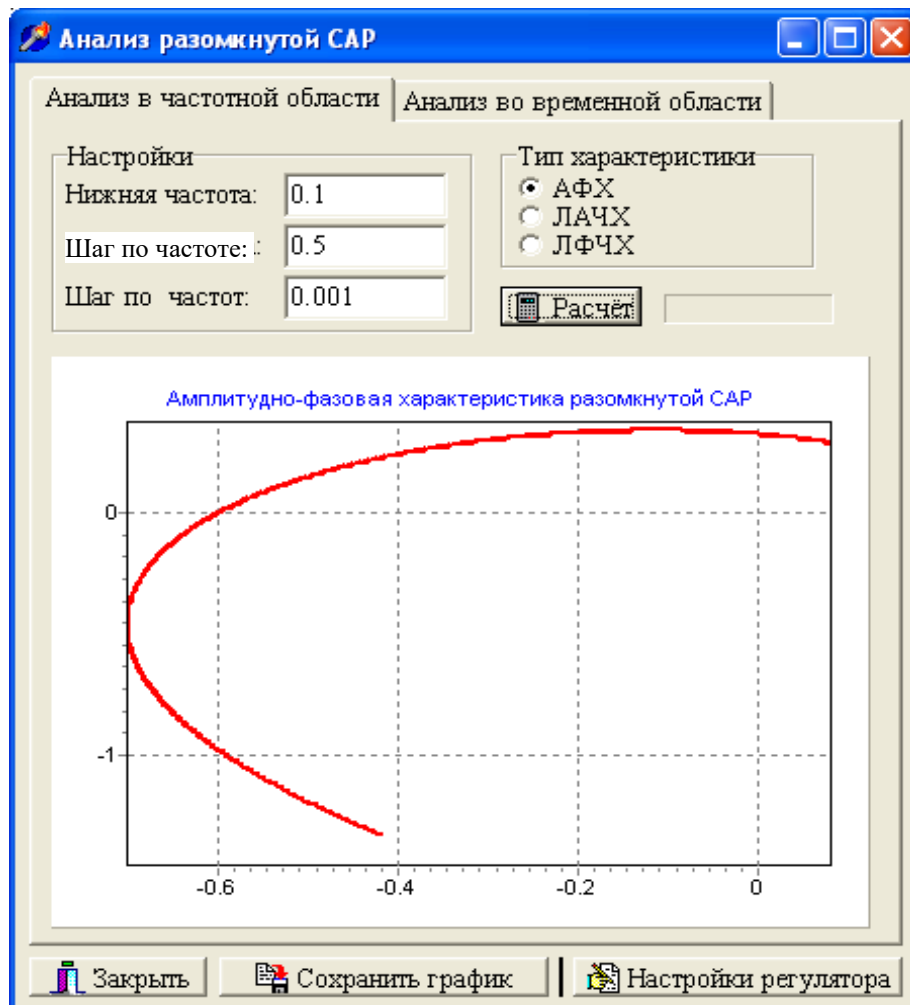


Рис. 1.19. Анализ разомкнутой САР с П-регулятором в частотной области при  $k_p^0 + \Delta k_p$

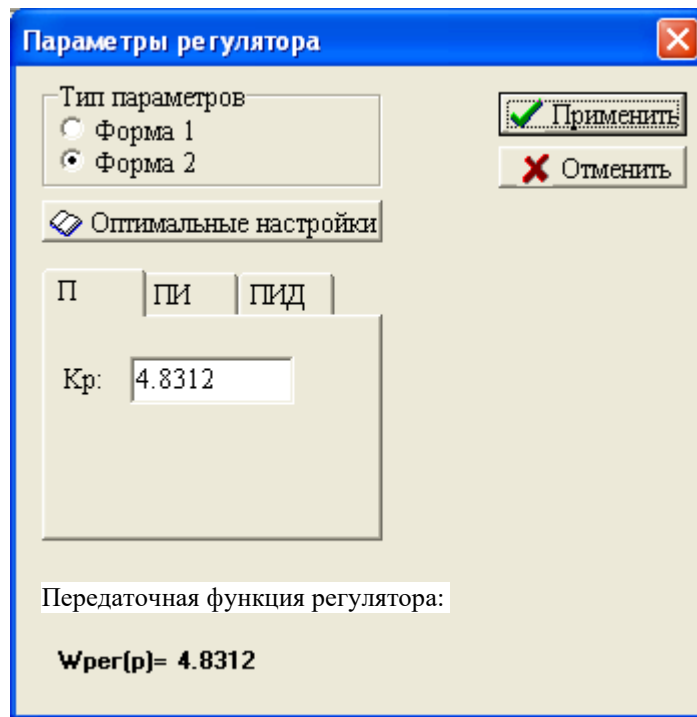


Рис. 1.20. Новое значение настройки для САР с П-регулятором  $k_p^o - \Delta k_p$

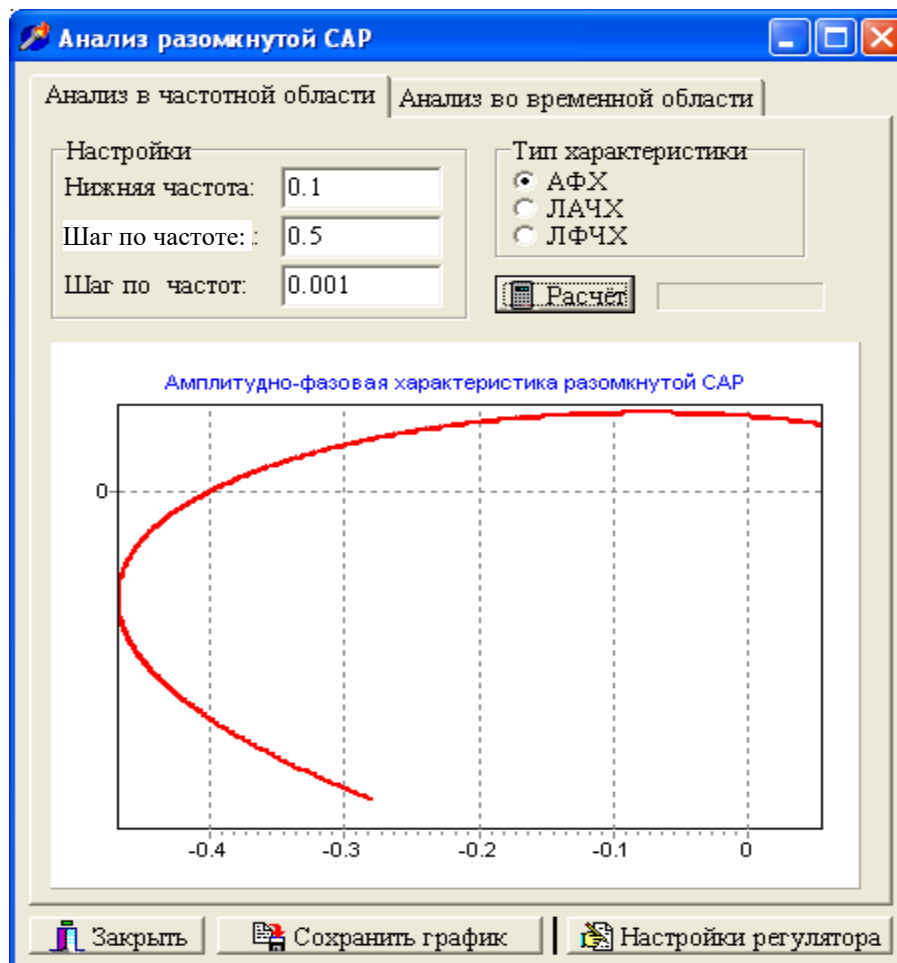


Рис. 1.21. Анализ разомкнутой САР с П-регулятором в частотной области при  $k_p^o - \Delta k_p$

Таким образом, получается семейство характеристик (3 графика): АФЧХ для разомкнутой САР при  $k_p^o$ ,  $k_p^o + \Delta k_p$ ,  $k_p^o - \Delta k_p$  (рис. 1.22).

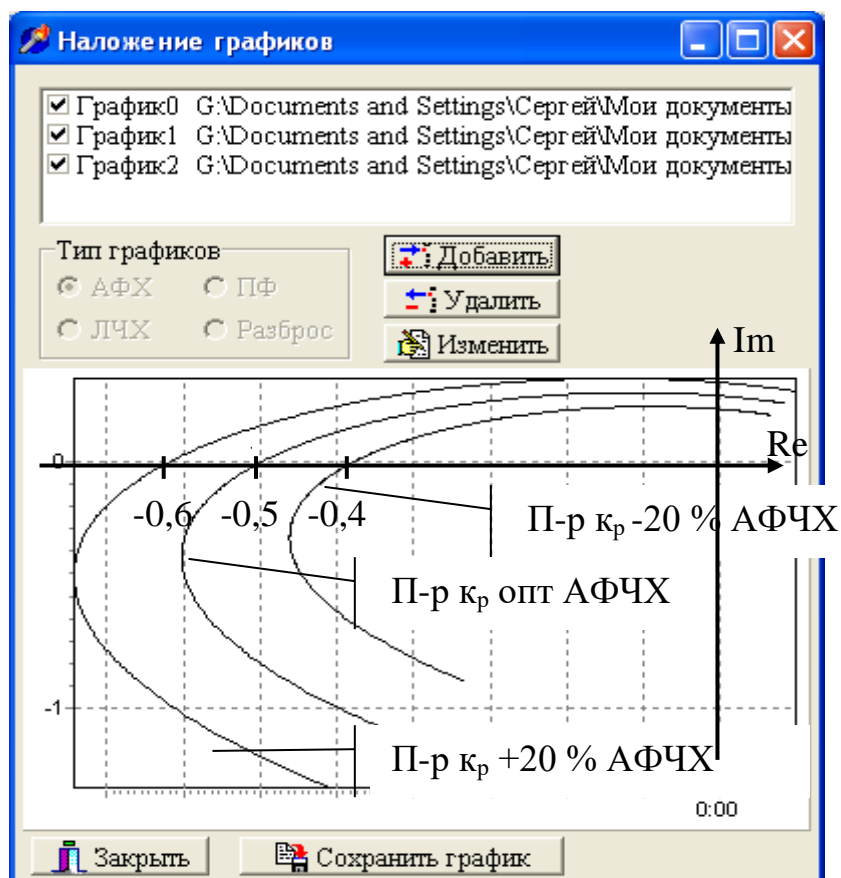


Рис. 1.22. Семейство АФЧХ для разомкнутой САР при  $k_p^o$ ,  $+\Delta k_p$ ,  $-\Delta k_p$

Для представления результатов однофакторного эксперимента в виде семейства характеристик воспользуйтесь меню *Отчет / Наложение графиков*. Сначала выберите тип графика, затем, нажимая кнопку *Добавить*, вставьте соответствующий график. Если тип графика не соответствует, т. е. вы выбрали АФЧХ, а пытаетесь добавить график ПХ, то график не будет вставлен. Семейство графиков сохраните в формате, например \*.bmp (рис. 1.23).

В отчете по лабораторной работе графики должны быть подписаны, указаны названия и значения осей.

В дальнейшем для составления нового семейства графиков необходимо сначала удалить предыдущие графики, нажимая кнопку *Удалить*, далее выбрать новый тип графика и, нажимая кнопку *Добавить*, вставить соответствующие графики.

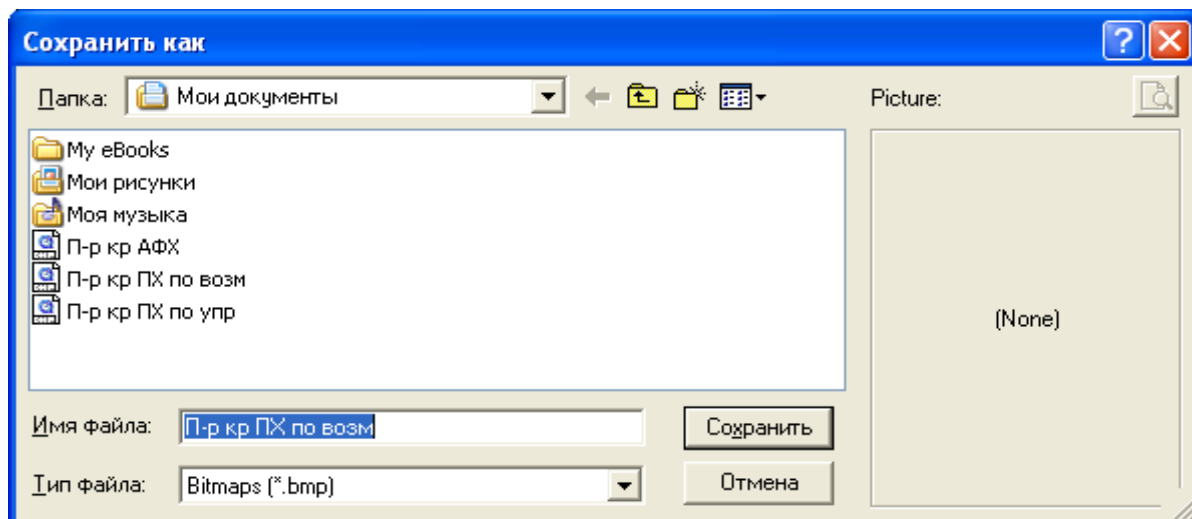


Рис. 1.23. Сохранение семейства графиков в формате \*.bmp

Таким образом, однофакторный эксперимент для разомкнутой САР с П-регулятором в частотной области завершен.

Далее необходимо проанализировать результаты эксперимента, а именно оценить устойчивость разомкнутой САР к вариациям параметров (настроек регулятора) в частотной области по виду изменения АФЧХ.

Необходимо также провести однофакторные эксперименты для САР с ПИ- и ПИД-регуляторами.

Для системы с ПИ-регулятором при проведении однофакторного эксперимента:

- сначала задайте оптимальные значения параметров регулятора  $k_p^o$ ,  $T_I^o$  (рис. 1.24);
- затем изменяйте коэффициент передачи регулятора  $k_p^o \pm \Delta k_p$  при постоянных значениях  $T_I = T_I^o$ ;
- после изменяйте постоянную интегрирования  $T_I \pm \Delta T_I$  при постоянных значениях  $k_p = k_p^o$ .

Анализируя результаты эксперимента, выявите закономерности влияния варьируемых параметров регулятора на устойчивость системы.

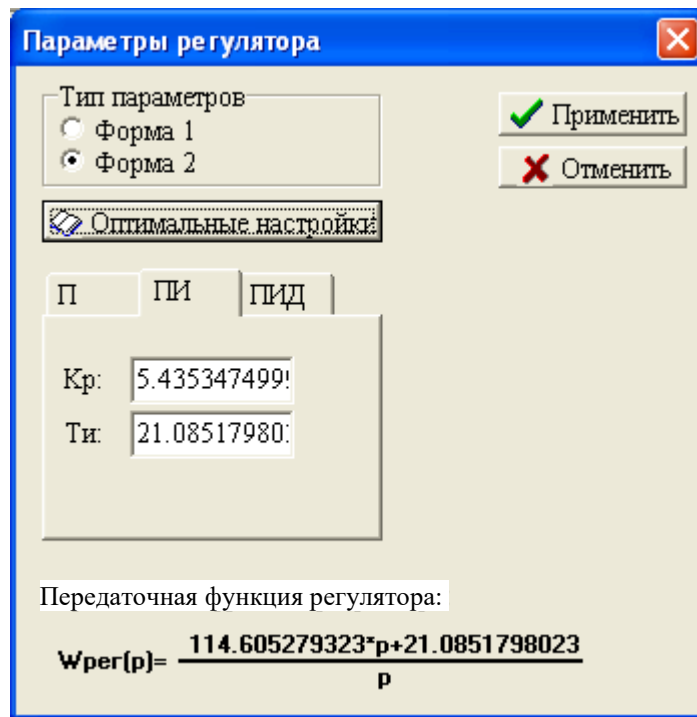


Рис. 1.24. Определение оптимальных значений параметров ПИ-регулятора

Для системы с ПИД-регулятором при проведении однофакторного эксперимента:

- сначала задайте оптимальные значения параметров регулятора  $k_p^o$ ,  $T_i^o$ ,  $T_d^o$  (рис. 1.25);
- затем изменяйте коэффициент передачи регулятора  $k_p^o \pm \Delta k_p$  при постоянных значениях  $T_i = T_i^o$  и  $T_d = T_d^o$ ;
- далее изменяйте постоянную интегрирования  $T_i^o \pm \Delta T_i$  при постоянных значениях  $k_p = k_p^o$  и  $T_d = T_d^o$ ;
- и наконец, изменяйте постоянную дифференцирования  $T_d^o \pm \Delta T_d$  при постоянных значениях  $k_p = k_p^o$  и  $T_i = T_i^o$ .

Анализируя результаты эксперимента, выявите закономерности влияния варьируемых параметров регулятора на устойчивость системы.

**Параметры регулятора**

Тип параметров  
☐ Форма 1  
☒ Форма 2

☒ Оптимальные настройки

П    ПИ    ПИД

Кр: 7.2471299998  
 Ти: 12.5925379375  
 Тд: 3.1632455299

Применить  
 Отменить

Передаточная функция регулятора:

$$W_{per}(p) = \frac{360.8462827174 \cdot p^2 + 96.990872355 \cdot p + 12.5925379375}{9.9583223352 \cdot p^2 + 12.5925379375 \cdot p}$$

Рис. 1.25. Определение оптимальных значений параметров ПИД-регулятора

На рис. 1.26 представлен шаблон оформления отчета по лабораторной работе с помощью меню *Отчеты*. В данном шаблоне при построении отчета достаточно выбрать из списка данные (по ОУ, регулятору, критические характеристики), файлы сохраненных графиков, вписать свои комментарии, предварительно просмотреть отчет и сохранить его в виде нового файла или дописать в существующий.

На рис. 1.27, *а – е* представлены информационные окна, которые появляются в случае неправильно заданных пользователем данных.

На рис. 1.28 представлено меню *Помощь*, в котором подробно описаны окно *Ввода параметров ОУ*, последовательность заполнения ячеек данных, возможности сохранения (применения) или несохранения (отмены) вновь введенных данных.

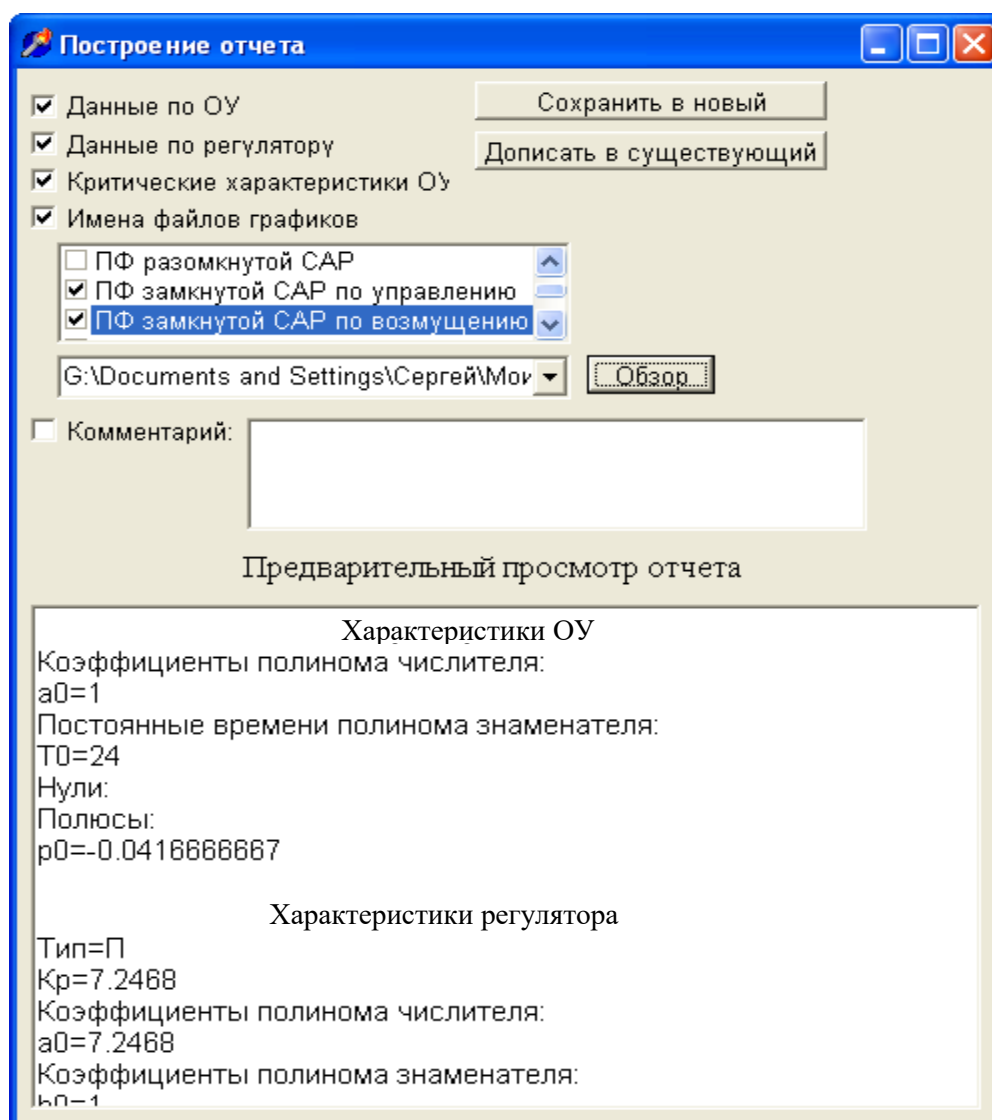
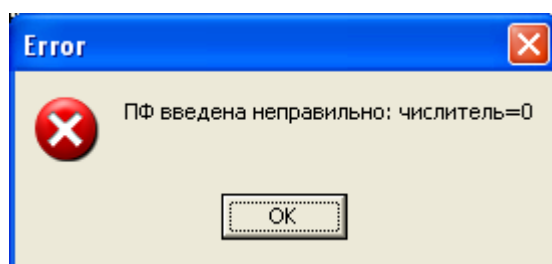
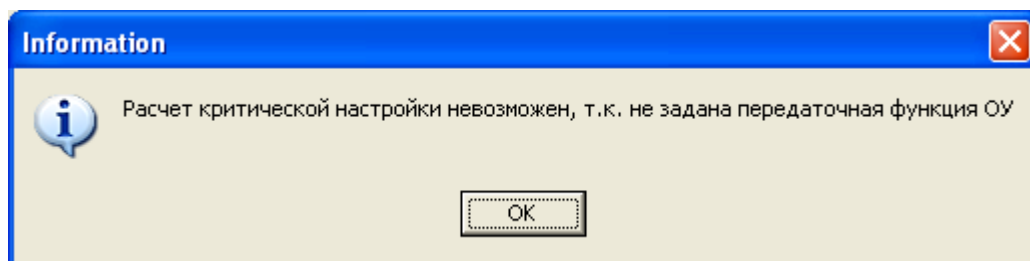


Рис. 1.26. Оформление отчета с помощью меню *Отчеты*

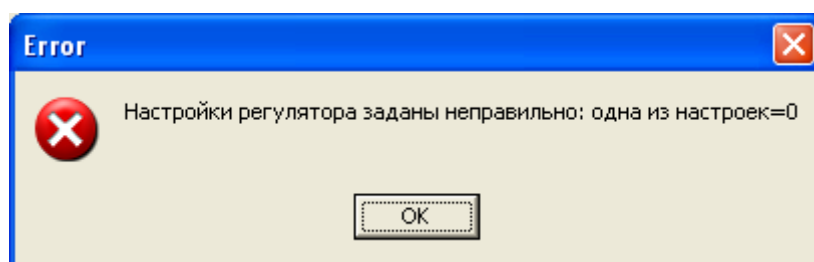
а



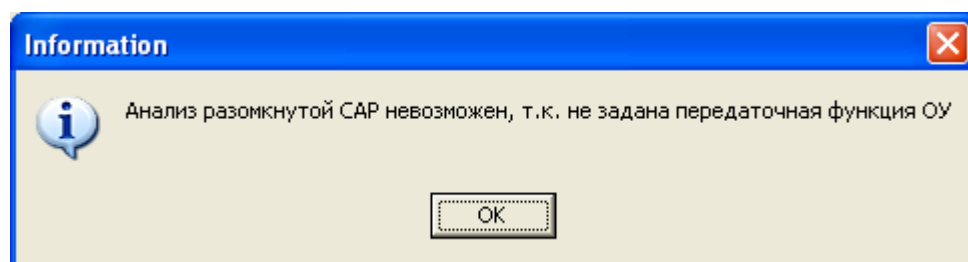
б



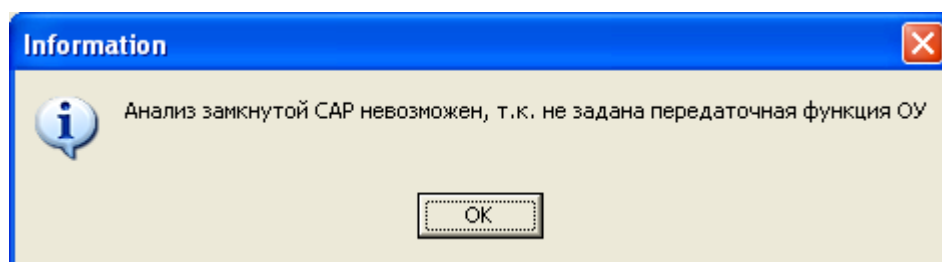
в



г



д



е

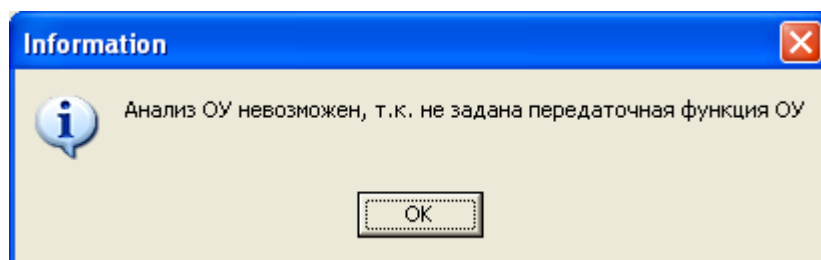


Рис. 1.27. Информационные окна



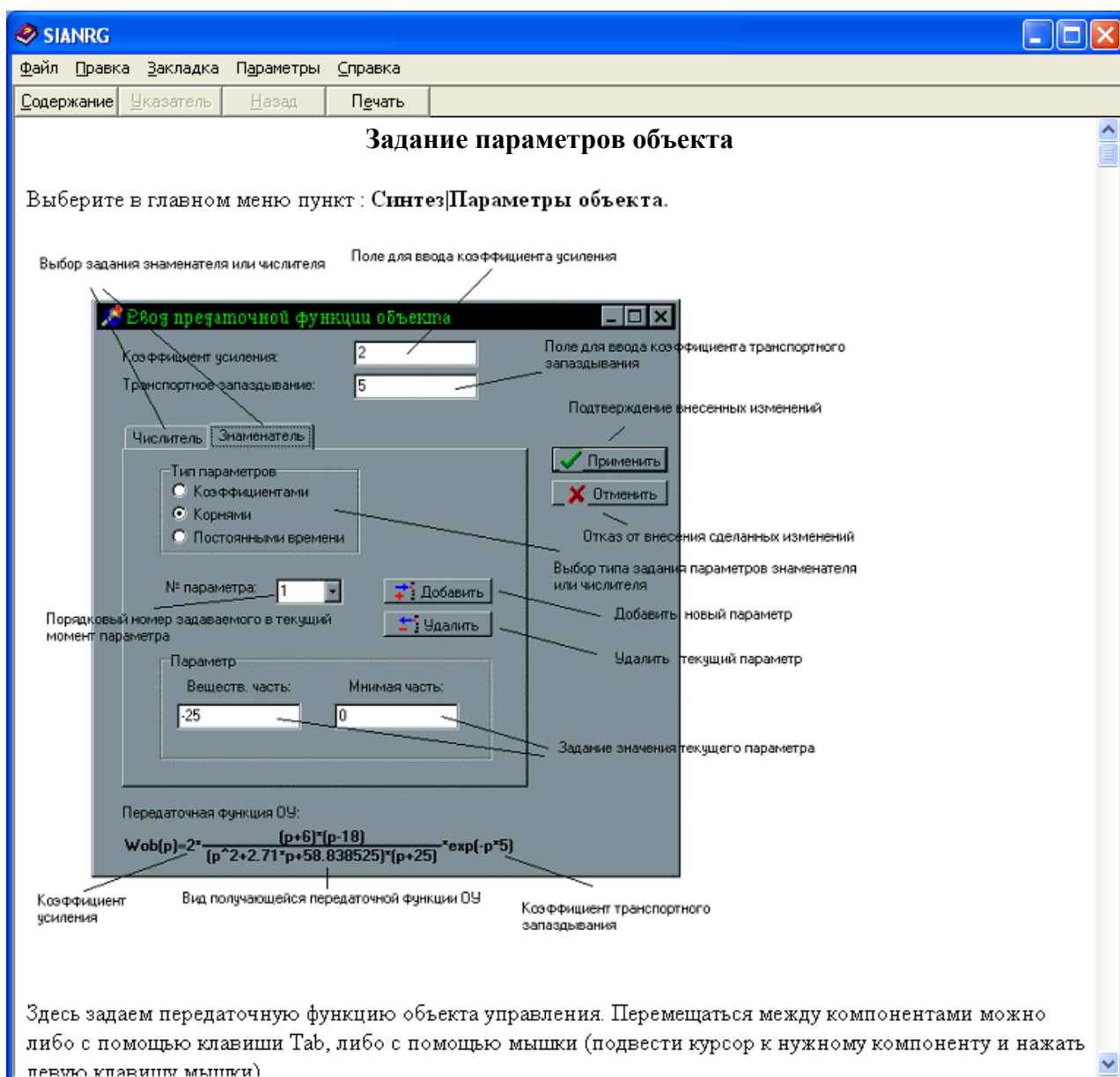


Рис. 1.28. Меню *Помощь*

## 1.4. Задания к лабораторной работе № 1

*Цель лабораторной работы № 1* – провести детерминированное моделирование САР, т. е. провести синтез, получив оптимальные настройки регуляторов, а также провести анализ чувствительности разомкнутой системы к вариациям параметров (настроек регулятора) в частотной области.

1. Запустить программу *C:\Users student\TuMYЭ\Sianrg.exe*, которая используется для моделирования САР.

2. Составить параметрическую модель СУ, для чего следует найти базовые (оптимальные) настройки П-регулятора  $k_p^o$ ; ПИ-регулятора  $k_p^o$  и  $T_I^o$  и ПИД-регулятора  $k_p^o$ ,  $T_I^o$  и  $T_D^o$  методом Циглера-Никольса. Данные по передаточной функции (1.8) объекта управления  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$  можно выбрать из табл. 1.1. Номер варианта уточнить у преподавателя.

Таблица 1.1

Варианты задания

Номер вари- анта	$k_{об}$	$T_{об}$	$\tau_{об}$	Номер вари- анта	$k_{об}$	$T_{об}$	$\tau_{об}$
1	2	8	2,4	12	0,2	4	2,0
2	3	10	3,0	13	0,3	5	2,5
3	5	12	3,6	14	0,5	6	3,0
4	6	14	4,2	15	2	100	30
5	2	8	4,0	16	3	120	36
6	3	10	5,0	17	5	140	42
7	5	12	6,0	18	6	160	48
8	0,2	16	5,0	19	2	50	25
9	0,3	20	6,0	20	3	60	30
10	0,4	24	7,0	21	5	70	35
11	0,6	28	8,0	22	0,5	24	7,0

3. Провести анализ разомкнутой САР в частотной области. Построить АФЧХ разомкнутой САР и оценить по ней устойчивость системы для базовых (оптимальных) настроек регуляторов.

4. В целях определения устойчивости системы к детерминированным вариациям параметров регулятора провести однофакторный эксперимент [4]. В качестве факторов эксперимента выбрать  $k_p$ ,  $T_I$  и  $T_D$ . Уровень вариации пара-

метров регулятора  $\Delta$  может быть равен  $\pm 10, \pm 20, \pm 30$  % (уточнить у преподавателя):

а) для системы с П-регулятором необходимо изменять коэффициент передачи регулятора  $k_p^o \pm \Delta k_p$ ;

б) для системы с ПИ-регулятором необходимо сначала изменять коэффициент передачи регулятора  $k_p^o \pm \Delta k_p$  при постоянных значениях  $T_{\text{и}} = T_{\text{и}}^o$ , затем изменять постоянную интегрирования  $T_{\text{и}}^o \pm \Delta T_{\text{и}}$  при постоянных значениях  $k_p = k_p^o$ ;

в) для системы с ПИД-регулятором необходимо сначала изменять коэффициент передачи регулятора  $k_p^o \pm \Delta k_p$  при постоянных значениях  $T_{\text{и}} = T_{\text{и}}^o$  и  $T_{\text{д}} = T_{\text{д}}^o$ , затем изменять постоянную интегрирования  $T_{\text{и}}^o \pm \Delta T_{\text{и}}$  при постоянных значениях  $k_p = k_p^o$  и  $T_{\text{д}} = T_{\text{д}}^o$ , и, наконец, изменять постоянную дифференцирования  $T_{\text{д}}^o \pm \Delta T_{\text{д}}$  при постоянных значениях  $k_p = k_p^o$  и  $T_{\text{и}} = T_{\text{и}}^o$ .

5. По АФЧХ разомкнутой САР в частотной области оценить устойчивость системы. Определить критическое значение коэффициента регулятора  $k_p^{\text{кр}}$ , когда система потеряет устойчивость, увеличивая коэффициент регулятора с шагом 10 % от оптимального  $k_p^o$ .

6. Результаты синтеза и анализа САР представить нижеследующим образом.

6.1. Исходные данные ОУ (передаточная функция), полученные базовые (оптимальные) настройки для систем с П-регулятором (коэффициент передачи регулятора  $k_p$ ), ПИ-регулятором (коэффициент передачи регулятора  $k_p$ , постоянная интегрирования  $T_{\text{и}}$ ) и ПИД-регулятором (коэффициент передачи регулятора  $k_p$ , постоянная интегрирования  $T_{\text{и}}$ , постоянная дифференцирования  $T_{\text{д}}$ ).

6.2. Графики базовой АФЧХ разомкнутой САР и базового переходного процесса замкнутой САР, семейство графиков (фрагменты первого перехода АФЧХ через  $180^\circ$  и переходных процессов), полученных при проведении од-

нофакторного эксперимента, при которых САР остается устойчивой при детерминированном изменении параметров регуляторов.

6.3. Результаты однофакторного эксперимента представить в виде семейства АФЧХ (3 графика при  $k_p^o$ ,  $k_p^o + \Delta k_p$ ,  $k_p^o - \Delta k_p$ ;  $T_{и}^o$ ,  $T_{и}^o + T_{и}$ ,  $T_{и}^o - T_{и}$ ;  $T_{д}^o$ ,  $T_{д}^o + T_{д}$ ,  $T_{д}^o - T_{д}$ ).

6.4. Выявить закономерность влияния варьируемых параметров регулятора на устойчивость системы и написать выводы.

## **1.5. Описание работы программного модуля SIANRG для анализа САР во временной области**

Целью моделирования САР является создание системы, удовлетворяющей определенным требованиям, которые формулируются в виде качественных показателей (см. п. 1.2.4). Качество функционирования замкнутой САР определяется по ПХ  $h(t)$  – реакции системы на типовое воздействие в виде единичной ступенчатой функции  $1(t)$  (см. рис. 1.3, 1.4). Показатели качества определяются по формулам (1.22)–(1.28).

Для синтеза и анализа одноконтурных САР (см. рис. 1.7) используется программный модуль *SIANRG*. Модель ОУ описывается передаточными функциями (1.4), которые характеризуют реакцию выхода системы на управляющее и возмущающее воздействия. В программном модуле *SIANRG* предусмотрена возможность ввода полиномов числителя и знаменателя в трех формах (1.5)–(1.7'). Упрощенная форма ПФ ОУ – (1.8), (1.9). Модель регулятора описывается также передаточными функциями динамических звеньев, соответствующих регулирующим блокам (1.10)–(1.14) или (1.15)–(1.17').

Для составления модели одноконтурной САР проводится синтез, при котором задают ПФ ОУ, выбирают закон регулирования и определяют настройки блока регулирования (см. п. 1.3).

Анализ САР позволяет определить устойчивость и качество системы по переходному процессу. Анализ САР в частотной области позволяет оценить устойчивость замкнутой САР по АФЧХ разомкнутой САР. В программном мо-

дуле *SIANRG* проверка устойчивости одноконтурной САР осуществляется по критерию Найквиста.

Анализ замкнутой САР во временной области позволяет оценить качество устойчивой САР по переходным процессам, вызванным единичной ступенчатой функцией по каналам управления и возмущения.

Моделирование в программном модуле *SIANRG* начинается с *Главного меню* (см. рис. 1.7). Меню *Синтез* содержит опции, позволяющие последовательно проводить синтез САР: задание параметров объекта, расчет критической настройки регулятора, расчет оптимальных параметров регуляторов (см. рис. 1.8–1.14). Меню *Анализ* (см. рис. 1.15) содержит опции, позволяющие последовательно проводить анализ ОУ, разомкнутой САР в частотной и временной областях, замкнутой САР по управлению и возмущению (также в частотной и временной областях), разброса параметров объекта, разброса параметров регулятора.

Данный параграф посвящен детерминированному анализу чувствительности замкнутой САР к вариациям параметров (настроек регулятора) во временной области.

Анализ качества функционирования замкнутой САР во временной области по управлению (рис. 1.29) осуществляется по ПХ. Необходимо так задать настройки начального и конечного времени и шага по времени, чтобы просмотреть ПХ системы до момента полного установившегося режима. Уставка задается равной 1, поскольку ПХ  $h(t)$  есть реакция системы на типовое воздействие в виде единичной ступенчатой функции  $1(t)$ . После задания настроек (начальное время, конечное время, шаг по времени) необходимо нажать кнопку *Расчет*. Во время анализа качества функционирования замкнутой САР во временной области по управлению необходимо сразу сохранять график ПХ в формате \*.grs (рис. 1.30), это позволит в дальнейшем правильно оформить отчет с наложением графиков. При анализе качества функционирования замкнутой САР также не рекомендуется менять настройки начального и конечного времени и шага по времени.

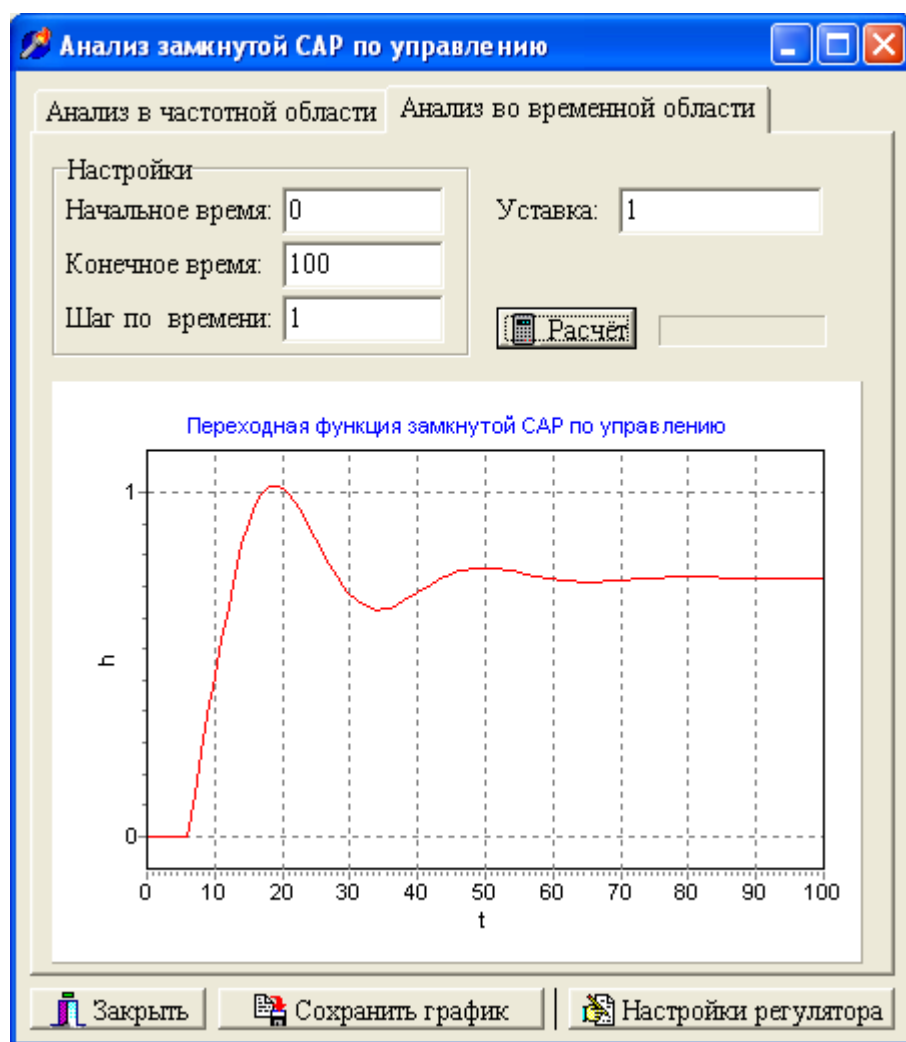


Рис. 1.29. Анализ замкнутой САР во временной области по управлению

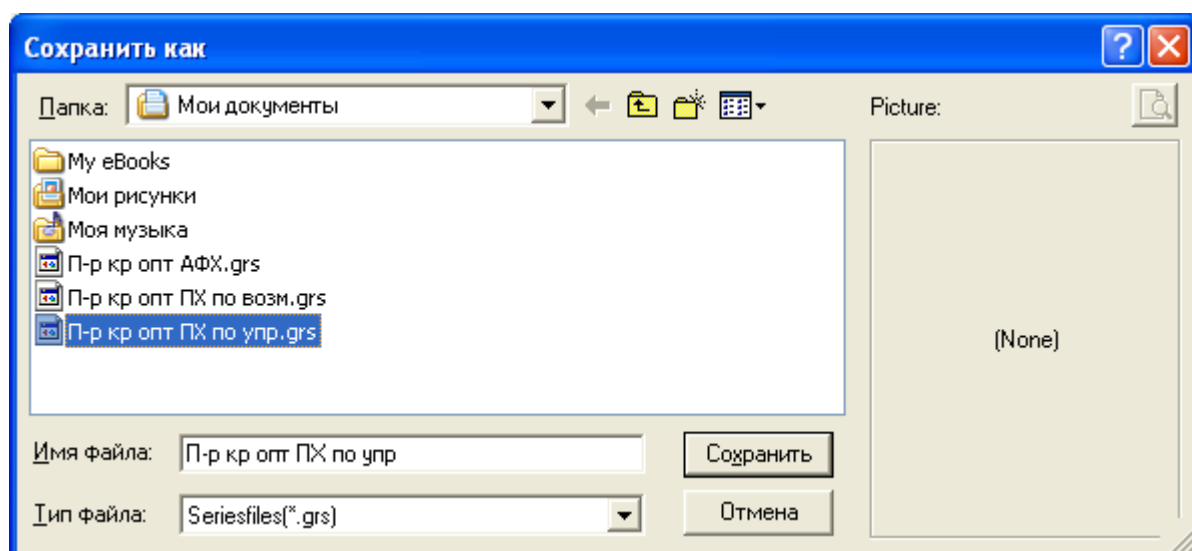


Рис. 1.30. Сохранение графика ПХ замкнутой САР при анализе во временной области по управлению

Анализ замкнутой САР во временной области по каналу возмущению как реакция системы на типовое воздействие в виде единичной ступенчатой функции  $1(t)$  (рис. 1.31) также осуществляется по ПХ, с сохранением графика (рис. 1.32).

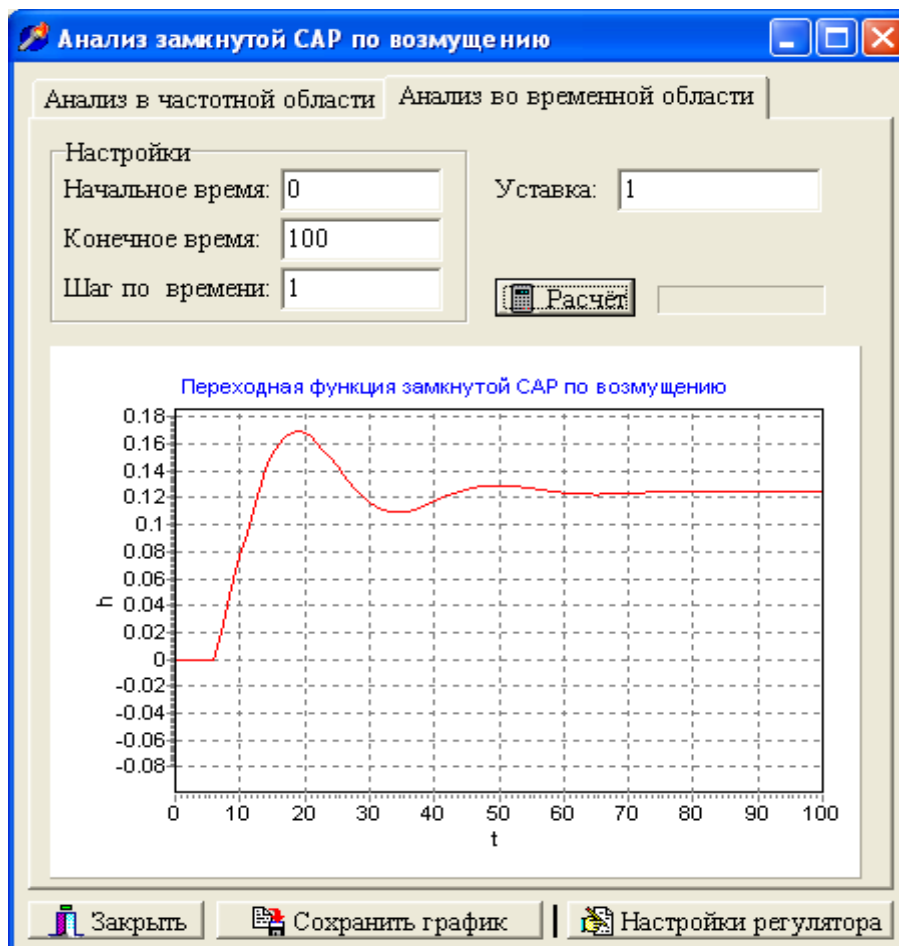


Рис. 1.31. Анализ замкнутой САР во временной области по возмущению

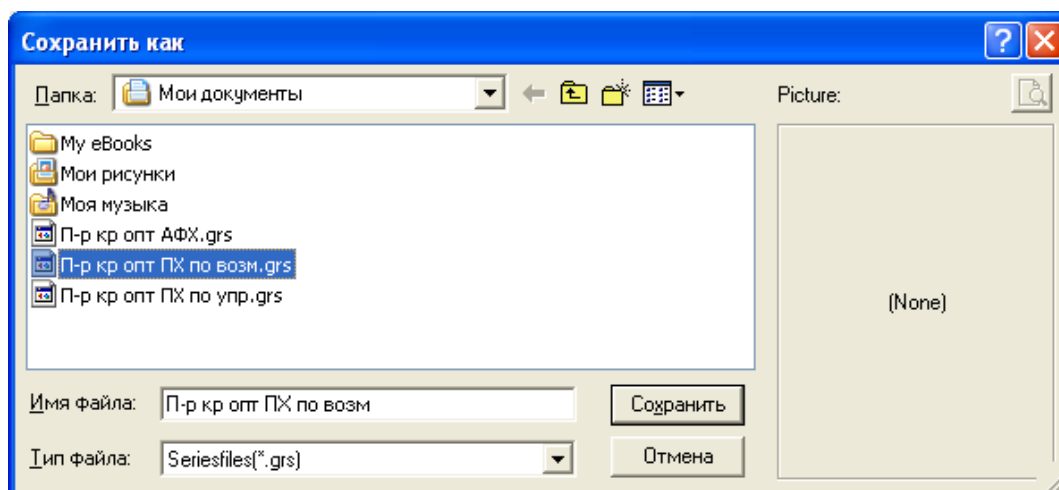


Рис. 1.32. Сохранение графика ПХ замкнутой САР при анализе во временной области по возмущению

Для проведения однофакторного эксперимента задайте новое значение настройки регулятора, например для системы с П-регулятором  $k_p^o + \Delta k_p$ , и проанализируйте замкнутую САР во временной области в двух вариантах: по управлению (рис. 1.33) и по возмущению (рис. 1.34).

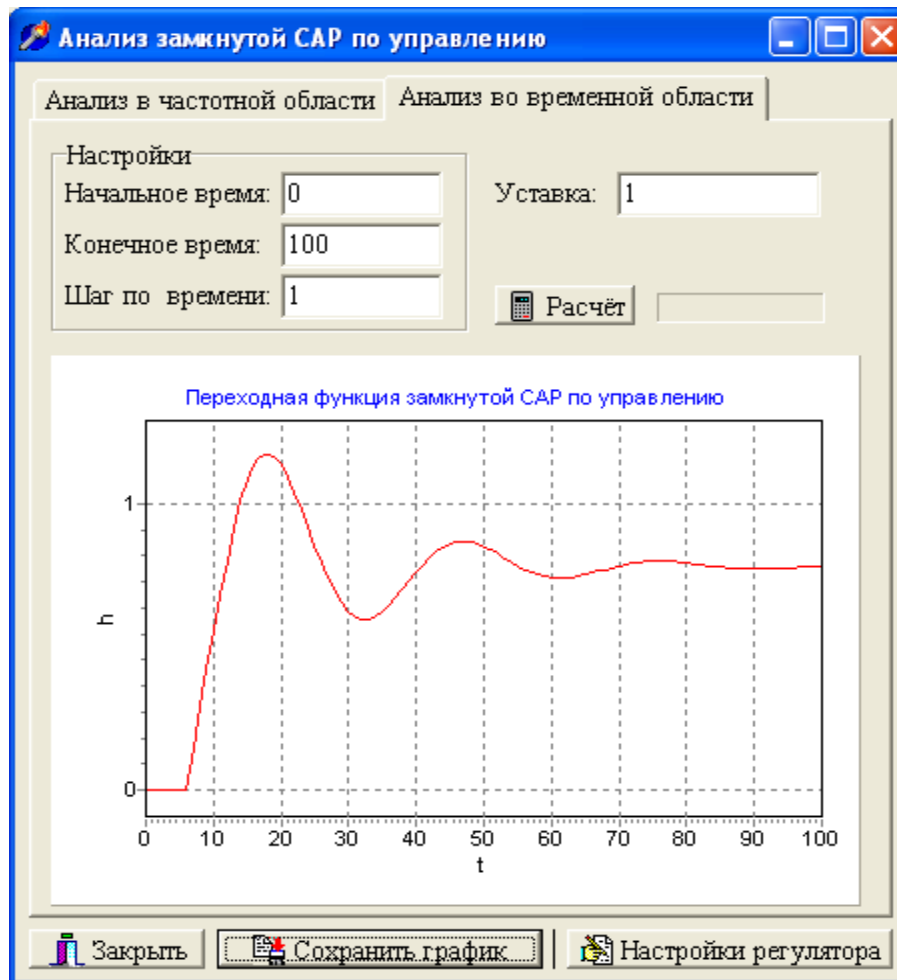


Рис. 1.33. Анализ замкнутой САР с П-регулятором во временной области

по управлению при  $k_p^o + \Delta k_p$

Сохраните графики в формате \*.grs. Затем задайте значение настройки для системы с П-регулятором  $k_p^o - \Delta k_p$  (рис. 1.35) и также проанализируйте САР в двух вариантах: замкнутая САР во временной области по управлению (рис. 1.36) и по возмущению (рис. 1.37). Сохраните графики в формате \*.grs.

Таким образом, получаются семейства характеристик (по 3 графика): ПХ замкнутой САР по управлению при  $k_p^o$ ,  $k_p^o + \Delta k_p$ ,  $k_p^o - \Delta k_p$  (рис. 1.38); ПХ замкнутой САР по возмущению при  $k_p^o$ ,  $k_p^o + \Delta k_p$ ,  $k_p^o - \Delta k_p$  (рис. 1.39).



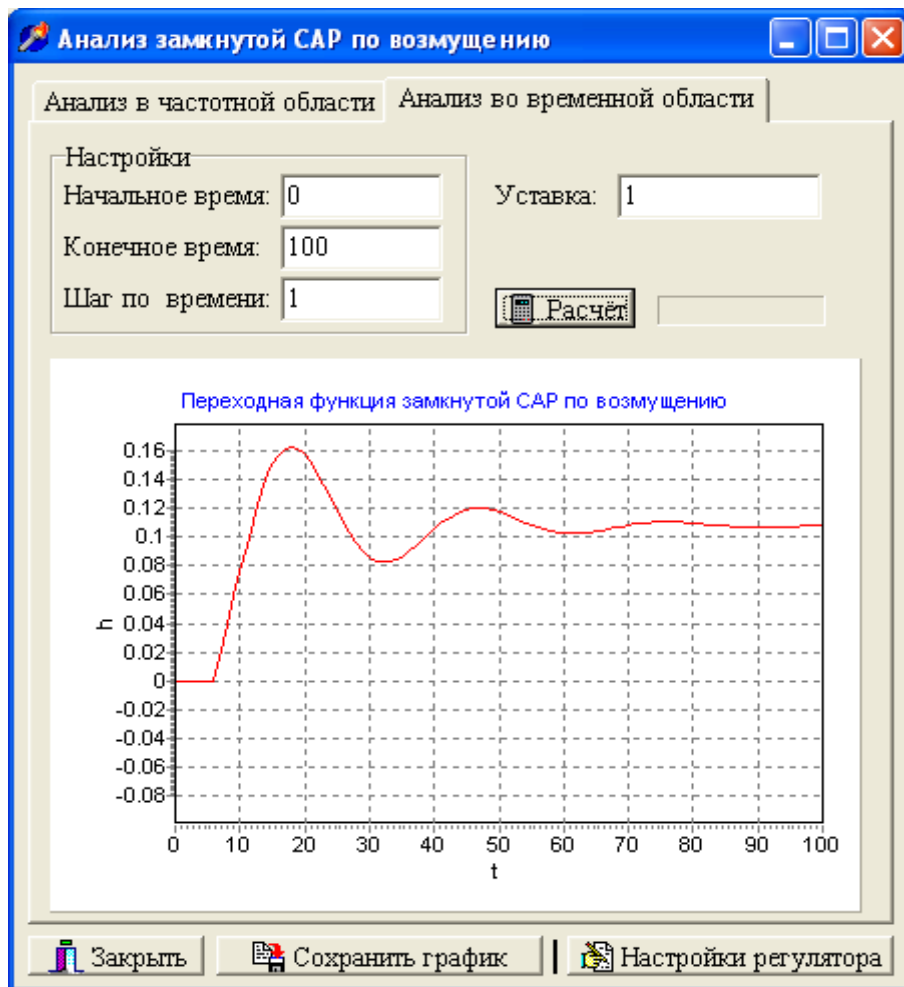


Рис. 1.34. Анализ САР с П-регулятором во временной области по возмущению при  $k_p^o + \Delta k_p$

Рис. 1.35. Новое значение настройки для САР с П-регулятором  $k_p^o - \Delta k_p$

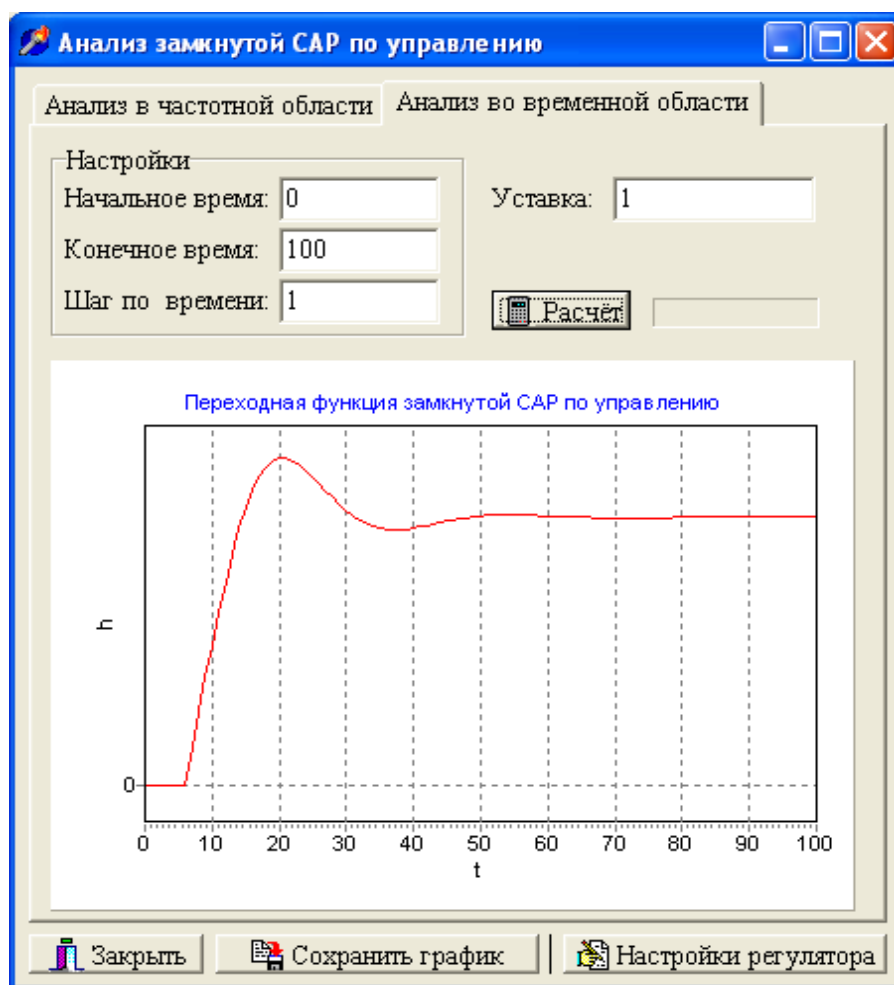


Рис. 1.36. Анализ замкнутой САР с П-регулятором во временной области

по управлению при  $k_p^o - \Delta k_p$

Для представления результатов однофакторного эксперимента в виде семейства характеристик воспользуйтесь меню *Отчет / Наложение графиков*. Сначала выберите тип графика, затем, нажимая кнопку *Добавить*, вставьте соответствующий график. Если тип графика не соответствует, т. е. вы выбрали АФЧХ, а пытаетесь добавить график ПХ, то график не будет вставлен. Обязательно сразу сохраните каждое семейство графиков в формате, например \*.bmr (рис. 1.40). Для составления нового семейства графиков необходимо сначала удалить предыдущие графики, нажимая кнопку *Удалить*, далее выбрать соответствующий тип графика и, нажимая кнопку *Добавить*, вставить графики.

В отчете по лабораторной работе графики должны быть подписаны, указаны названия и значения осей.

Таким образом, однофакторный эксперимент для САР с П-регулятором завершен.

Далее необходимо проанализировать результаты эксперимента:

- по ПХ замкнутой САР во временной области по управлению и возмущению определить параметры качества системы: время регулирования  $t_p$  при 5 %-ной  $\delta$ -трубке (см. рис. 1.3, 1.4), максимальные динамические отклонения  $\sigma$  по (1.22) и (1.23), перерегулирование  $\eta$  по (1.24) и (1.25);
- выявить закономерности влияния варьируемых параметров регулятора на показатели качества системы.

Далее необходимо провести однофакторные эксперименты для САР с ПИ- и ПИД-регуляторами.

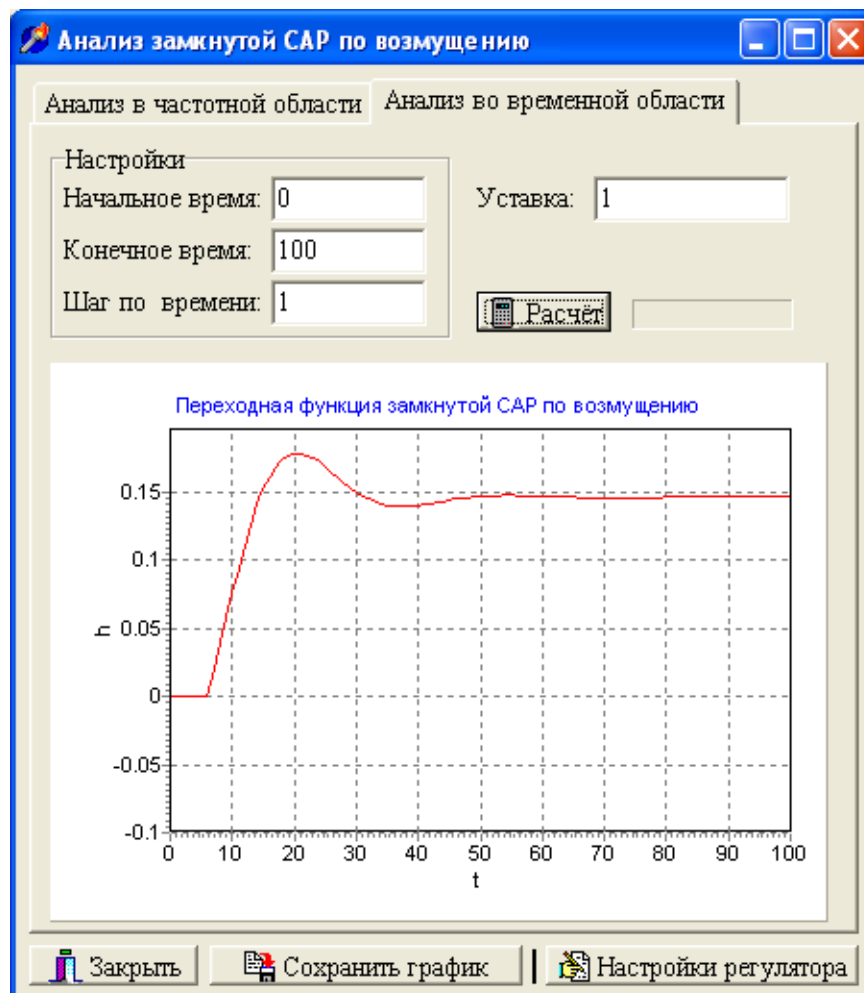


Рис. 1.37. Анализ замкнутой САР с П-регулятором во временной области

по возмущению при  $k_p^0 - \Delta k_p$

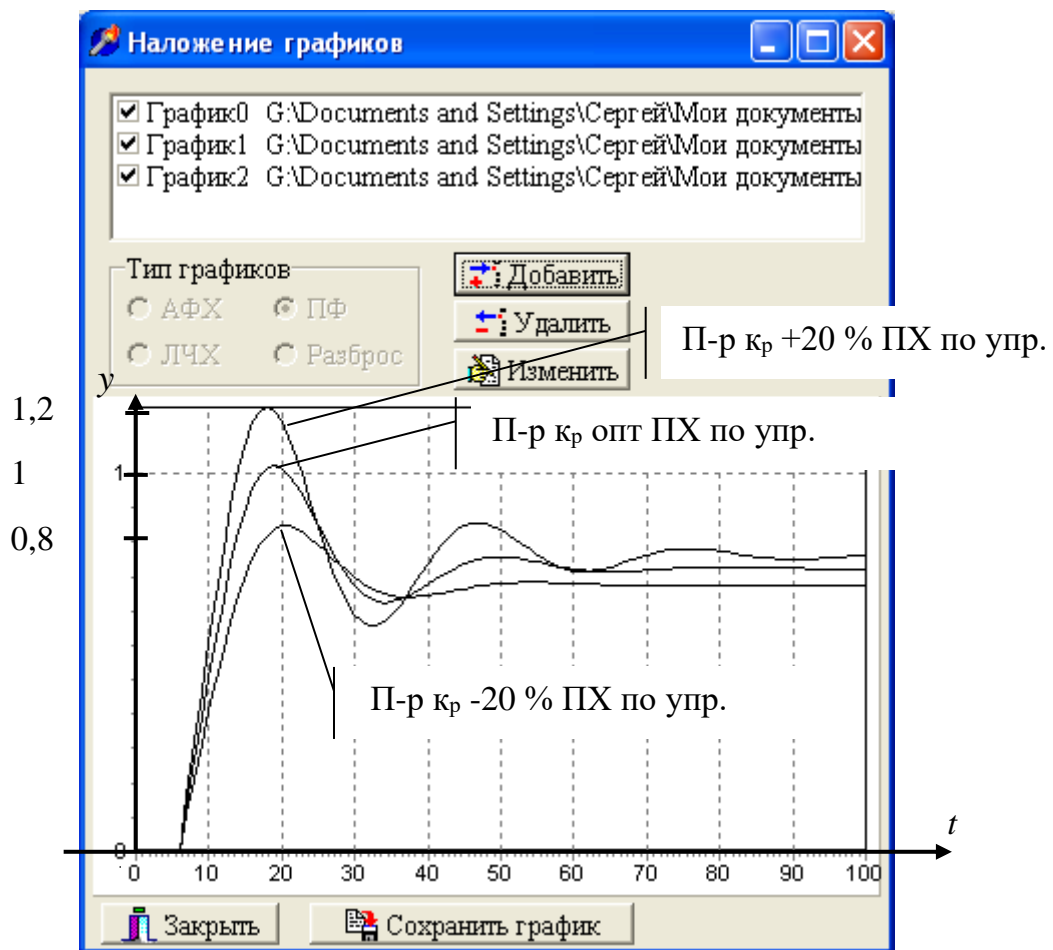


Рис. 1.38. Семейство ПХ для замкнутой САР по управлению при  $k_p^o \pm \Delta k_p$

Для системы с ПИ-регулятором при проведении однофакторного эксперимента:

- сначала задайте оптимальные значения параметров регулятора  $k_p^o$  и  $T_{\text{и}}^o$  (рис. 1.41);
- затем изменяйте коэффициент передачи регулятора  $k_p^o \pm \Delta k_p$  при постоянных значениях  $T_{\text{и}} = T_{\text{и}}^o$ ;
- после изменяйте постоянную интегрирования  $T_{\text{и}}^o \pm \Delta T_{\text{и}}$  при постоянных значениях  $k_p = k_p^o$ .

Проанализируйте результаты эксперимента и выявите закономерности влияния варьируемых параметров регулятора на показатели качества системы.

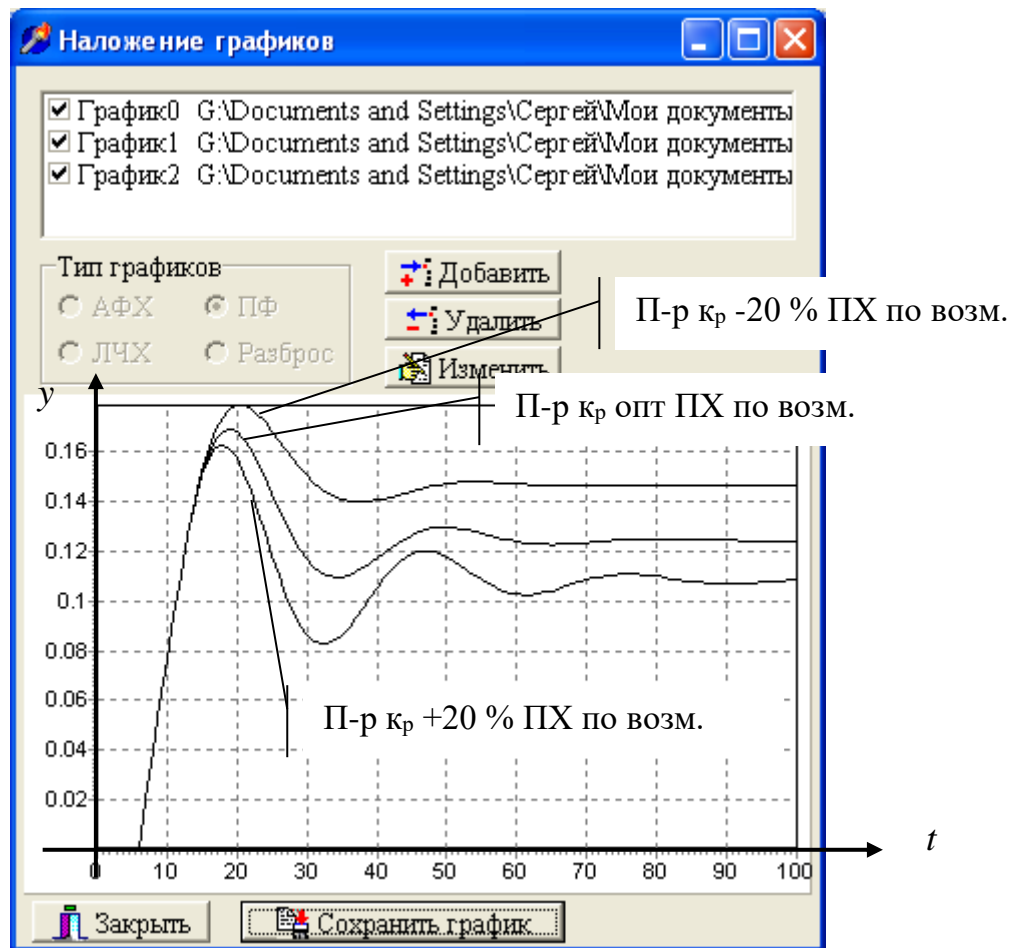


Рис. 1.39. Семейство ПХ для замкнутой САР по возмущению при  $k_p^0 \pm \Delta k_p$

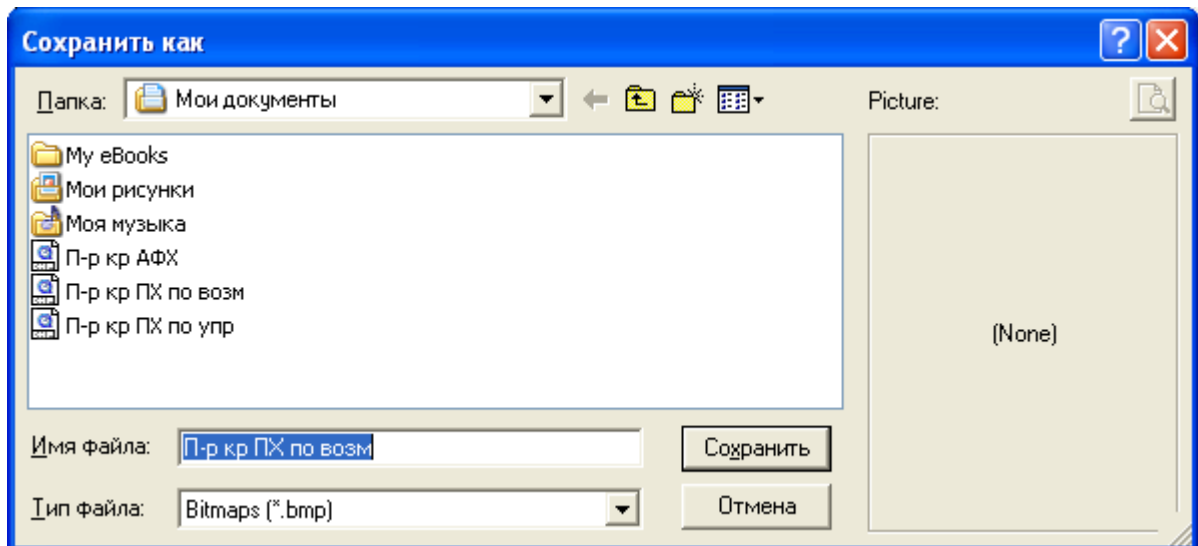


Рис. 1.40. Сохранение семейства графиков в формате \*.bmp

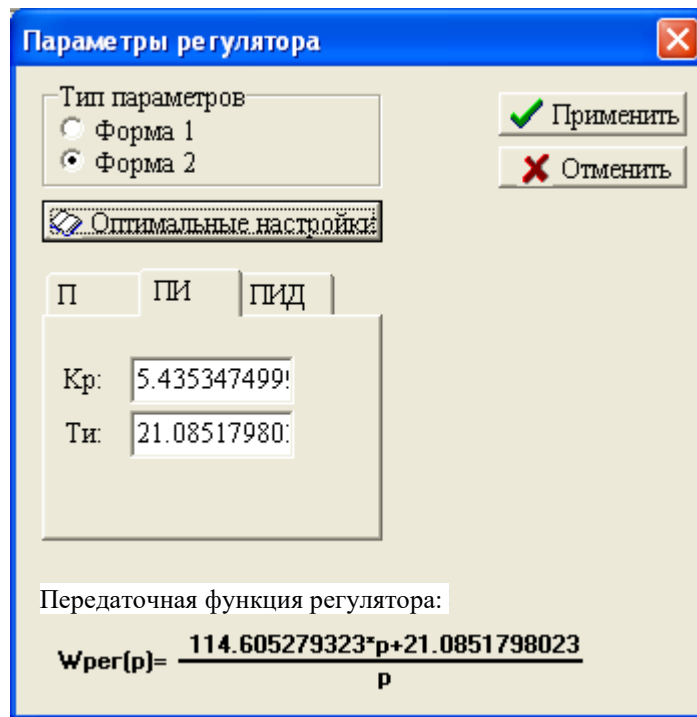


Рис. 1.41. Определение оптимальных значений параметров ПИ-регулятора

Для системы с ПИД-регулятором при проведении однофакторного эксперимента:

- сначала задайте оптимальные значения параметров регулятора  $k_p^o$ ,  $T_i^o$ ,  $T_d^o$  (рис. 1.42);
- затем изменяйте коэффициент передачи регулятора  $k_p^o \pm \Delta k_p$  при постоянных значениях  $T_i = T_i^o$  и  $T_d = T_d^o$ ;
- далее изменяйте постоянную интегрирования  $T_i^o \pm \Delta T_i$  при постоянных значениях  $k_p = k_p^o$  и  $T_d = T_d^o$ ;
- и наконец, изменяйте постоянную дифференцирования  $T_d^o \pm \Delta T_d$  при постоянных значениях  $k_p = k_p^o$  и  $T_i = T_i^o$ .

Проанализируйте результаты эксперимента и выявите закономерности влияния варьируемых параметров регулятора на показатели качества системы.

Параметры регулятора

Тип параметров  
☐ Форма 1  
☒ Форма 2

☒ Оптимальные настройки

П | **ПИ** | ПИД

Кр: 7.2471299998  
Тн: 12.5925379375  
Тд: 3.1632455299

Передаточная функция регулятора:

$$W_{per}(p) = \frac{360.8462827174 \cdot p^2 + 96.990872355 \cdot p + 12.5925379375}{9.9583223352 \cdot p^2 + 12.5925379375 \cdot p}$$

Применить  
Отменить

Рис. 1.42. Определение оптимальных значений параметров ПИД-регулятора

## 1.6. Задания к лабораторной работе № 2

*Цель лабораторной работы № 2* – провести детерминированное моделирование САР, т. е. провести синтез, получив оптимальные настройки регуляторов, а также провести анализ чувствительности замкнутой системы к вариациям параметров (настроек регулятора) во временной области.

1. Запустить программу *C:\Users\student\TuMUЭ\Sianrg.exe*, которая используется для моделирования САР.

2. Составить параметрическую модель СУ, для чего следует найти базовые (оптимальные) настройки П-регулятора  $k_p^o$ ; ПИ-регулятора  $k_p^o$  и  $T_n^o$  и ПИД-регулятора  $k_p^o$ ,  $T_n^o$  и  $T_d^o$  методом Циглера-Никольса. Данные по передаточной функции (1.8) объекта управления  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$  можно выбрать из табл. 1.1. Номер варианта уточнить у преподавателя.

3. Провести анализ замкнутой САР во временной области. Для этого определить переходные процессы системы по управлению и возмущению. Построить графики ПХ и определить время регулирования  $t_p$  при 5 %-ной  $\delta$ -трубке (см. рис. 1.3, 1.4); максимальные динамические отклонения  $\sigma$  по (1.22)

и (1.23), перерегулирование  $\eta$  по (1.24) и (1.25). Далее эти параметры будут являться базовыми (оптимальными) показателями качества САР.

4. В целях определения устойчивости системы к детерминированным вариациям параметров регулятора провести однофакторный эксперимент [4]. В качестве факторов эксперимента выбрать  $k_p$ ,  $T_{\text{И}}$  и  $T_{\text{Д}}$ . Уровень вариации параметров регулятора  $\Delta$  может быть равен  $\pm 10$ ,  $\pm 20$ ,  $\pm 30$  % (уточнить у преподавателя):

а) для системы с П-регулятором необходимо изменять коэффициент передачи регулятора  $k_p^{\circ} \pm \Delta k_p$ ;

б) для системы с ПИ-регулятором необходимо сначала изменять коэффициент передачи регулятора  $k_p^{\circ} \pm \Delta k_p$  при постоянных значениях  $T_{\text{И}} = T_{\text{И}}^{\circ}$ , затем изменять постоянную интегрирования  $T_{\text{И}}^{\circ} \pm \Delta T_{\text{И}}$  при постоянных значениях  $k_p = k_p^{\circ}$ ;

в) для системы с ПИД-регулятором необходимо сначала изменять коэффициент передачи регулятора  $k_p^{\circ} \pm \Delta k_p$  при постоянных значениях  $T_{\text{И}} = T_{\text{И}}^{\circ}$  и  $T_{\text{Д}} = T_{\text{Д}}^{\circ}$ , затем изменять постоянную интегрирования  $T_{\text{И}}^{\circ} \pm \Delta T_{\text{И}}$  при постоянных значениях  $k_p = k_p^{\circ}$  и  $T_{\text{Д}} = T_{\text{Д}}^{\circ}$ , и, наконец, изменять постоянную дифференцирования  $T_{\text{Д}}^{\circ} \pm \Delta T_{\text{Д}}$  при постоянных значениях  $k_p = k_p^{\circ}$  и  $T_{\text{И}} = T_{\text{И}}^{\circ}$ .

5. По ПХ замкнутой САР во временной области по управлению и возмущению найти параметры качества системы: время регулирования  $t_p$ , максимальное динамическое отклонение  $\sigma$ , перерегулирование  $\eta$  для каждого опыта однофакторного эксперимента, многократно повторяя пункт 4. Выявить закономерности влияния варьируемых параметров регулятора на показатели качества системы. Результаты однофакторного эксперимента представить в виде семейства ПХ (по 3 графика при  $k_p^{\circ}$ ,  $k_p^{\circ} + \Delta k_p$ ,  $k_p^{\circ} - \Delta k_p$ ;  $T_{\text{И}}^{\circ}$ ,  $T_{\text{И}}^{\circ} + T_{\text{И}}$ ,  $T_{\text{И}}^{\circ} - T_{\text{И}}$ ;  $T_{\text{Д}}^{\circ}$ ,  $T_{\text{Д}}^{\circ} + T_{\text{Д}}$ ,  $T_{\text{Д}}^{\circ} - T_{\text{Д}}$  отдельно для системы по управлению и возмущению).



6. Результаты синтеза и анализа САР представить нижеследующим образом.

6.1. Исходные данные ОУ (передаточная функция), полученные базовые (оптимальные) настройки для систем с П-регулятором (коэффициент передачи регулятора  $k_p$ ), ПИ-регулятором (коэффициент передачи регулятора  $k_p$ , постоянная интегрирования  $T_{\text{и}}$ ) и ПИД-регулятором (коэффициент передачи регулятора  $k_p$ , постоянная интегрирования  $T_{\text{и}}$ , постоянная дифференцирования  $T_{\text{д}}$ ), а также базовые выходные параметры переходных процессов САР (время регулирования  $t_p$ , максимальное динамическое отклонение  $\sigma$ , перерегулирование  $\eta$ ).

6.2. Результаты однофакторного эксперимента представить в виде семейства ПХ отдельно для системы по управлению и возмущению (по 3 графика при  $k_p^0$ ,  $k_p^0 + \Delta k_p$ ,  $k_p^0 - \Delta k_p$ ;  $T_{\text{и}}^0$ ,  $T_{\text{и}}^0 + T_{\text{и}}$ ,  $T_{\text{и}}^0 - T_{\text{и}}$ ;  $T_{\text{д}}^0$ ,  $T_{\text{д}}^0 + T_{\text{д}}$ ,  $T_{\text{д}}^0 - T_{\text{д}}$ ). В случае расходящегося переходного процесса (неустойчивой САР) графики ПХ представить отдельно.

6.3. Выявить закономерность влияния варьируемых параметров регулятора на показатели качества системы и написать выводы.

## **2. СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ**

### **2.1. Имитационное моделирование**

*Имитационная модель* реального процесса (объекта, явления) – программа для компьютера, реализующая упрощенную модель этого процесса вместе с алгоритмом, описывающим течение этого процесса [5]. Когда компьютер выполняет эту программу, он «имитирует» течение реального процесса. Меняя различные параметры программы, можно имитировать течение реального процесса в различных условиях. Таким образом, возникает возможность осуществления нижеследующего диалога.

Вопрос (его задает исследователь, лицо, принимающее решение (ЛПР), и т. п.): «Что произойдет с объектом (процессом, явлением), если...?».

Ответ (его дает компьютер, «проигрывая» заложенную в программу имитационную модель): «В заданных условиях с объектом (процессом, явлением) произойдет следующее...».

Организованный таким образом диалог человека с компьютером позволяет проводить те или иные эксперименты (они называются имитационными, вычислительными или машинными), получая при этом информацию, которая может быть отнесена к реальному процессу (объекту, явлению). Разумеется, полученная информация будет иметь тем большее отношение к реальности, чем более удачно построена имитационная модель. Схема имитационных исследований представлена на рис. 2.1.

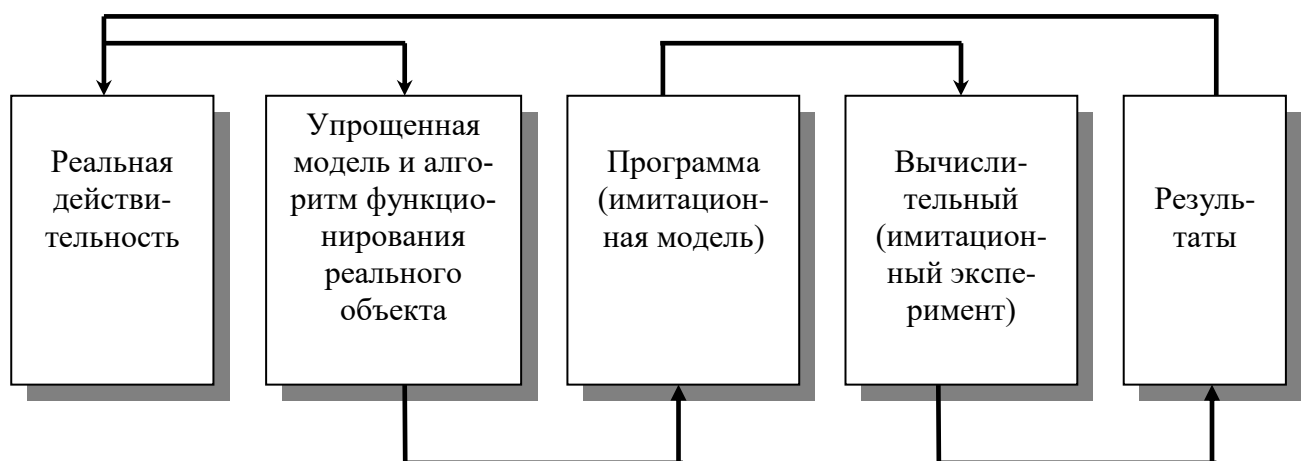


Рис. 2.1. Схема имитационных исследований

Термин «имитационное моделирование» возник как перевод английского выражения *simulation modeling*. Если обратиться к русским эквивалентам этих слов, то станет ясно, что перевод был сделан не совсем удачно, так как в нем явно прослеживается тавтология. Однако, поскольку термин уже получил широкое распространение, менять его едва ли возможно и целесообразно. Важнее хорошо понимать, что за ним стоит. Когда говорят «имитационная модель», обычно имеют в виду, что ей свойственны большая, чем в обычных математических моделях, близость к реальному объекту, возможность воспроизводить широкий спектр свойств объекта, использовать эмпирический материал; кроме того, всегда сохраняется возможность дальнейшего уточнения модели и др. Говоря об имитационном моделировании, в него включают как процесс создания

модели, так и ее исследование (проведение вычислительных экспериментов) с помощью компьютера.

Р. Шеннон [6] дает следующее определение: «...имитационное моделирование есть процесс конструирования реальной системы и постановки экспериментов на этой модели с целью оценить (в рамках ограничений, накладываемых некоторым критерием или совокупностью критериев) различные стратегии, обеспечивающие функционирование данной системы».

Как видно из этого определения, имитационное моделирование не очень приспособлено для выяснения причин того или иного явления (оно не дает ответа на вопрос «Почему?»), его роль гораздо более прагматична – давать ответ на вопрос «Что будет, если...?».

#### *2.1.1. Основные этапы имитационного моделирования*

Процесс имитационного моделирования (создание модели и алгоритма функционирования реального объекта, создание программы и проведение вычислительных экспериментов) является итеративным. При этом системный анализ чередуется и сочетается с составлением модели и алгоритма, вычислительными экспериментами, корректировкой модели и т. п.

Имитационное моделирование состоит из следующих взаимозависимых и, зачастую, пересекающихся во времени этапов [5]:

- 1) постановка проблемы, формулировка цели моделирования;
- 2) системный анализ моделируемого объекта; построение концептуальной модели;
- 3) составление модели и алгоритма функционирования реального объекта, при необходимости – структуризация модели;
- 4) программная реализация и вычислительные эксперименты;
- 5) анализ результатов экспериментов и коррекция модели, алгоритма, программы;
- 6) проведение имитационных экспериментов в целях решения поставленной проблемы.

Охарактеризуем каждый этап.

1. Имитационное моделирование, как и всякое другое, должно начинаться с постановки проблемы, с ясного и четкого понимания целей моделирования. Желательно перечислить те вопросы, ответы на которые должны быть получены в ходе вычислительных экспериментов.

Необходимость построения имитационной модели, как правило, возникает в процессе прикладных исследований конкретного объекта. Поэтому одной из важнейших особенностей этого этапа моделирования является неперенное участие в разработках человека (или группы людей), который будет использовать будущую модель для решения поставленной проблемы, т. е. ЛПР. Нужно отметить, что в реальной жизни цели редко бывают четко очерченными. Это существенно затрудняет точную постановку проблемы. Поэтому упомянутый выше список вопросов следует обязательно согласовывать с ЛПР. С ним же следует решать вопрос о масштабах задачи: о ее объеме, границах в пространстве, продолжительности моделируемого отрезка времени (интересуют ЛПР долгосрочные или краткосрочные эффекты) и т. д.

Необходимо уточнить объект исследования: системы в целом или отдельные ее части. Лишь после этого целесообразно переходить к последующим этапам.

2. С учетом целей моделирования следует выявить существенные особенности изучаемого объекта, осуществить отбор необходимых сведений о нем и построить так называемую концептуальную модель объекта. Эта модель представляет формализованное описание объекта (словесное описание, представление в виде схем, диаграмм и т. п.), являющееся основой для создания имитационной модели.

Построение концептуальной модели предполагает:

а) выявление основных процессов, которые должны быть учтены при моделировании;

б) выявление тех основных характеристик объекта, которые необходимо иметь для решения исходной проблемы;

в) определение множества переменных и параметров, которые влияют на динамику этих характеристик;

г) определение множества входных и выходных данных модели;

д) установление границ и законов взаимодействия объекта с окружающей средой (в частности, определение законов случайных воздействий на объект);

е) разработку причинно-следственных связей, временных отношений и гипотез, согласно которым осуществляется взаимоувязка всех перечисленных компонент в единую систему – имитационную модель.

3. Далее осуществляется переход от качественных зависимостей концептуальной модели к точному алгоритмическому описанию. Исходным пунктом при этом является задание вектора состояния модели, компоненты которого – это те характеристики изучаемого объекта, которые выделены при построении концептуальной модели как базовые, несущие в себе необходимую информацию для решения поставленной проблемы:

$$X^t = (X_1^t, X_2^t, \dots, X_n^t).$$

Часто бывает полезным сразу выделять «управляемые компоненты» вектора состояния. В общем случае каждая компонента вектора  $X^t$  есть функция времени, зависящая также от множества значений параметра  $\{A\}$ , некоторого подмножества компонент вектора состояния  $X^t$ , множества внешних факторов  $\eta^t$  и управляющих воздействий  $U^t$ , т. е.

$$X^t = X^t(X^t, \eta^t, A, U^t, t).$$

В зависимости от цели моделирования (целевой функции), от проблемы, которую необходимо разрешить с помощью модели, вводится так называемое системное время, моделирующее ход времени в реальной системе. Различают два типа шкал модельного времени: равномерный и событийный. Для первого типа характерно введение некоторого постоянного шага  $\Delta t$  изменения времени. В этом случае вектор состояния модели рассматривается в моменты  $t + k\Delta t$ , где  $k$  – целое положительное число (разумеется, величина  $t + k\Delta t$  не должна превосходить  $T$  – величины моделируемого промежутка времени). В этом случае

каждому моменту реального времени  $t_i^p$  ставится в соответствие момент модельного времени  $t_i^m$ , причем

$$t_1^m - t_2^m = A(t_1^p - t_2^p),$$

где  $A$  – масштабный коэффициент пропорциональности.

Если моделируемый объект изменяется лишь при наступлении некоторого события, а в остальные моменты времени остается без изменений, пользоваться равномерной шкалой неудобно, поскольку вектор состояния на отрезке времени между двумя событиями остается постоянным. В этом случае отсчет времени в модели ведется «по событиям», т. е. каждый последующий момент времени в модели наступает только тогда, когда в ней моделируется наступление некоторого события.

После, а иногда и параллельно с заданием вектора состояния системы и выбором временного шага, производится декомпозиция модели и выявление ее блочной конструкции (если в этом есть необходимость). С этой целью множество переменных модели делится на непересекающиеся подмножества, в каждое из которых входит группа «однородных» переменных. Понятие «однородности», как правило, определяется самим исследователем в зависимости от цели моделирования, количества и качества исходных данных. Чаще всего однородными, входящими в один блок, считаются переменные, описывающие отдельный процесс, какую-либо подсистему или элемент исходного объекта, группу факторов, имеющих одну и ту же природу (например, климатообусловленные или антропогенные факторы и т. п.). В результате декомпозиции модель представляется в виде комплекса взаимосвязанных подмоделей – блоков, которые взаимодействуют по определенным законам и в итоге позволяют провести имитационное исследование объекта.

Блочный принцип построения модели имеет целый ряд преимуществ, особенно ощутимых при создании сложных имитационных моделей. Прежде всего, если модель достаточно сложна, требует значительного объема памяти и машинного времени, возможности использования такой модели для имитацион-

ного эксперимента оказываются весьма ограниченными. Единственным выходом в этом случае оказывается декомпозиция модели для того, чтобы программы, реализующие отдельные блоки, работали последовательно и обменивались информацией по тем или иным правилам.

Поскольку блоки описывают различные подсистемы, процессы, факторы, системное время для каждого из них может быть различным. Оно определяется, исходя из внутренних потребностей блока. Если, к примеру, в блоке описываются «быстрые» изменения, то время исчисляется мелкими единицами измерения: секундами, часами, сутками (скажем, при моделировании процесса фильтрации воды в почве после дождя, процесса накопления автомобилей перед светофором и т. п.); если изменения объекта во времени происходят достаточно медленно (рост дерева, старение оборудования, глобальные изменения климата Земли и т. п.), то время исчисляется месяцами, годами, десятилетиями и даже тысячелетиями. Однако необходимо позаботиться о том, чтобы в итоге все результаты по отдельным блокам были сведены к единому системному времени, принятому для модели в целом.

После завершения декомпозиции модели следует приступить к разработке отдельных ее блоков. Для каждого из них:

- а) уточняются и конкретизируются те гипотезы, которые непосредственно относятся к процессам, аспектам, элементам, «принадлежащим» данному блоку;

- б) определяется соответствующее подмножество входных и выходных данных, причем эти данные могут принадлежать как ко множеству «входов» и «выходов» общей модели, так и ко множеству локальных (или внутренних) входных и выходных данных других блоков;

- в) формируется множество параметров;

- г) формализуются основные законы взаимодействия элементов блока.

При этом происходит переход от качественных зависимостей концептуальной модели к точным количественным зависимостям и логическим схемам взаимодействия элементов внутри блока.

Что касается последнего, то в практике имитационного моделирования далеко не все связи концептуальной модели удастся отразить в виде зависимостей теоретического характера. Часто приходится вводить эмпирические зависимости, полученные на основе данных натурных наблюдений, в результате обобщения опыта моделирования подобных объектов и т. п. Неоценимую роль на этапе формализации играет экспертная оценка полученных эмпирических зависимостей, коэффициентов и т. п.

Существенное влияние на качество разработки отдельных блоков оказывает выбор различных математических средств моделирования: аппарата дифференциальных уравнений, статистического моделирования, методов теории оптимального управления, алгоритмизации логических конструкций и т. п. Важным также является то, в каком сочетании эти средства используются для решения исходной проблемы, как согласуется выбор методов с возможностями компьютера. Поэтому на этапе разработки блоков необходимо участие не только математиков и экспертов, но и системного программиста, знакомого с характеристиками вычислительной техники, математическим и техническим обеспечением процесса счета. Это позволит оценить возможности программы, реализующей на компьютере создаваемую модель, определить пути возможно нежелательных, но часто так необходимых упрощений.

4. Заключительным в построении модели является объединение блоков в имитационную модель на базе стандартного или специально созданного математического обеспечения. Здесь особую роль играет выбор языка программирования: либо это будут универсальные языки типа Си, Паскаль, Фортран и т. п., либо специализированные языки имитационного моделирования типа ДИНАМО, GPSS, Симула и т. д. Проблема носит принципиальный характер, так как специализированные языки удобны для программирования, отличаются концептуальной направленностью, что позволяет при составлении несложных имитационных моделей опустить этап построения формальной модели. Однако такие языки требуют специальных трансляторов, которые не всегда входят в стандартное математическое обеспечение компьютера. В свою очередь, исполь-



зование универсальных языков, как правило, сильно увеличивает объем программ, делает их громоздкими и «трудночитаемыми» для пользователя, хотя и допускает проведение имитационных экспериментов практически на любых компьютерах, что расширяет область практического применения модели.

Составлению программ, реализующих всю модель в целом, предшествуют испытания и отработка различных схем взаимодействия блоков. Здесь бывает удобно рассматривать имитационную модель как коллектив автоматов с памятью и без нее, детерминированных или стохастических, а работу модели – как изучение с помощью компьютера коллективного поведения автоматов в случайной или детерминированной среде.

На этом заканчиваются первые четыре этапа построения имитационной модели. Они представлены на рис. 2.2.

5. Маловероятно, что построенная имитационная модель сразу же окажется удачной. Скорее всего, в ней обнаружатся ошибки. Для отыскивания этих ошибок и используются вычислительные эксперименты как с отдельными блоками, так и с системой в целом. Причем желательно проведение таких экспериментов, результат которых по тем или иным причинам может быть предсказан. Тогда отклонение результата от прогнозируемого служит индикатором наличия ошибок либо в модели, либо в алгоритме, либо в программе, либо сразу в нескольких местах.

Устранение ошибок продолжается до тех пор, пока результаты экспериментов придут в соответствие с прогнозируемыми. После этого можно считать, что имитационная модель создана.

Однако имитационное моделирование состоит не только в построении самой имитационной модели, т. е. инструмента для проведения научных исследований, но и в применении этого инструмента. Необходимо уметь использовать эту модель в исследовательских целях – тех целях, для которых она создавалась.

Последний 6 этап – проведение имитационных экспериментов в целях решения поставленной проблемы рассмотрим более подробно в п. 2.1.3 и п. 3.1.

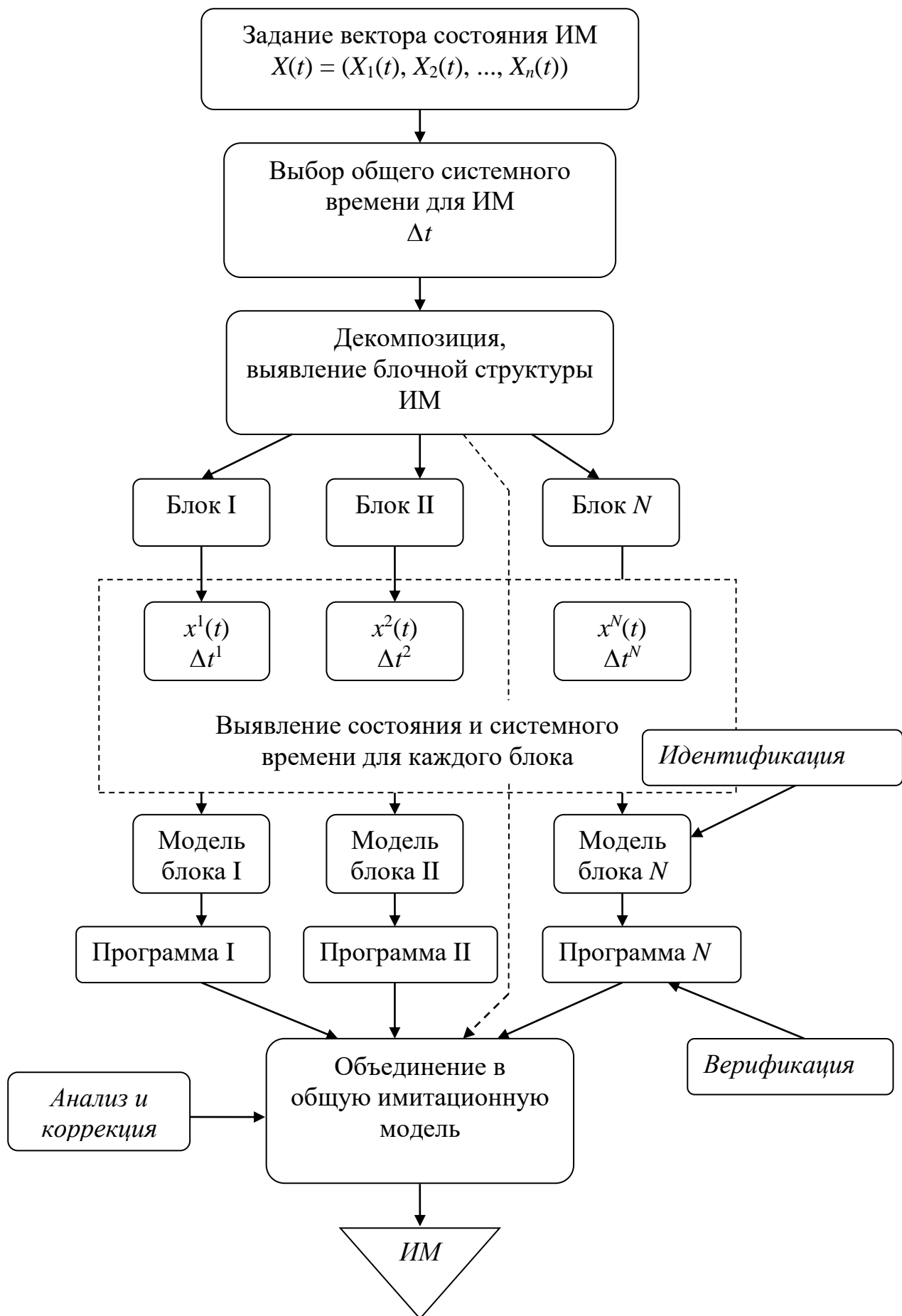


Рис. 2.2. Первые четыре этапа построения имитационной модели

### 2.1.2. Идентификация и верификация имитационной модели

Итак, имитационная модель построена. Однако прежде чем ее использовать, необходимо решить следующие задачи:

1) выбрать числовые значения неопределенных пока числовых параметров (идентификация);

2) убедиться, что при этих значениях параметров модель хорошо соответствует моделируемому объекту, адекватна ему (верификация, проверка адекватности).

Приведем наиболее распространенную постановку задачи идентификации.

Пусть  $\vec{y}(t) = \vec{y}(t, \vec{h})$  – вектор выходных характеристик имитационной модели, зависящей от набора параметров  $\vec{h} = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ . Предположим, что имеется ряд известных векторов  $\vec{y}(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ , представляющих собой результаты натурных наблюдений за моделируемым объектом. Разобьем промежуток  $[t_1, t_2]$  на две части:  $[t_1, \tau]$  – обучающий промежуток и  $[\tau, t_2]$  – экзаменуемый промежуток.

Задача идентификации состоит в том, чтобы найти такой набор параметров  $\vec{h}$ , который доставляет минимум функционалу

$$\sum_{t=t_1}^{\tau} (\vec{y}(t) - \vec{y}(t, \vec{h}))^2.$$

Для решения этой задачи могут быть использованы известные численные методы нахождения экстремума функции многих переменных.

Обозначим найденный в результате решения этой задачи наилучший набор параметров через  $\vec{h}^*$ . Используя в модели именно эти параметры, получим выходные характеристики в виде  $\vec{y} = \vec{y}(t, \vec{h}^*)$ . На этом решение задачи идентификации закончено.

Перейдем к задаче верификации, которая мало формализована. Прежде всего убедимся, что на экзаменуемом промежутке времени  $[\tau, t_2]$  расчетная траектория  $\vec{y} = \vec{y}(t, \vec{h}^*)$  близка к фактической.

Сравнение этих двух траекторий позволяет судить об адекватности модели. Существуют специальные методы оценки близости траекторий. Один из них состоит в вычислении коэффициента несовпадения:

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\vec{y}(t) - \vec{y}^*(t))^2}}{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \vec{y}^2(t)} + \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\vec{y}^*)^2(t)}}, \quad 0 \leq U \leq 1.$$

Чем ближе  $U$  к нулю, тем ближе модельная траектория к фактической. В случае, когда  $U$  равен единице, модель не является адекватной и требует либо перестройки структуры, замены или уточнения гипотез, либо идентификации по более полным и достоверным данным.

Однако даже если близость траекторий имеет место, еще нет гарантии того, что модель адекватна реальному объекту. Естественно потребовать, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) машинная реализация соответствует формальной модели;
- 2) «динамика» модели соответствует «динамике» реального объекта;
- 3) результаты моделирования правильно интерпретируются.

Проверка адекватности в этом смысле осуществляется на основе экспертного анализа и статистических методов.

Под соответствием машинной и формальной моделей понимается, во-первых, идентичность их алгоритмических структур (сохраняется ли логика построения модели при машинной реализации?) и, во-вторых, совпадение областей варьирования компонент вектора состояния формальной и машинной моделей. Второе требование означает, что численные методы, которые используются для реализации модели на компьютере, не должны давать такую погрешность, которая выводит некоторую компоненту из области допустимых значе-

ний. Например, если шаг интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений с положительно-определенными переменными выбран слишком большим, то можно получить отрицательные значения искомых переменных, что не соответствует их смыслу.

Соответствие имитируемой и реальной динамики частично проверяется уже на стадии верификации модели. Однако известно, что практически любую имитационную модель можно отладить до нужной степени совпадения моделируемой и фактической траекторий. На рис. 2.3 приведен пример прогнозирования по модели, которая хорошо аппроксимирует фактическую траекторию в ретроспективном периоде, но дает абсолютно неверный прогноз, т. е. неадекватно отражает поведение реального объекта.

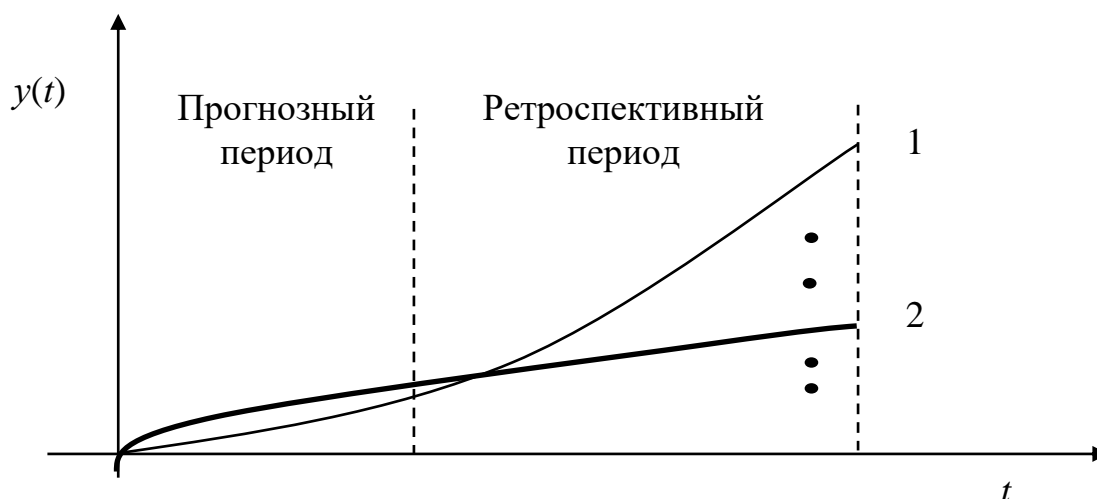


Рис. 2.3. Прогнозирование по модели:

1 — фактическая траектория; 2 — расчетная траектория

Следовательно, для того чтобы оценить адекватность модели, необходимо качественно исследовать ее динамические свойства путем проведения серии *тестовых расчетов*. Можно выделить два основных типа тестов. К первому относятся тесты, в которых задаются правдоподобные значения входов и управляющих воздействий. Если в этом случае расчеты по модели не противоречат известным законам поведения реального объекта (нашим представлениям о нем), то это говорит в пользу адекватности модели. В противном случае необходимо найти причины несогласованности и перестроить модель. Второй тип

тестов основан на использовании критических ситуаций, т. е. данных, которые не характерны для исследуемого объекта, но тем не менее могут иметь место. Эти тесты особенно важны для сложных моделей, предназначенных для долгосрочного прогнозирования, поскольку чем лучше модель описывает поведение объекта в критических условиях, тем больше можно быть уверенным в правильности расчетов для нормальных условий.

Адекватность модели характеризуется также ее *чувствительностью* по отношению к изменениям параметров и начальных значений вектора состояния. Если результаты исследований с помощью модели существенно изменяются при малых возмущениях параметров и незначительных отклонениях от начальных данных (другими словами, если модель не является устойчивой), то ее нельзя считать адекватной (при условии, конечно, что исследуемый объект обладает устойчивостью в этом смысле). Требование устойчивости тем более важно, чем менее точно могут быть определены параметры модели.

Анализируя адекватность модели, следует помнить о цели исследования, о проблеме, для решения которой разрабатывается модель. Дело в том, что конкретная модель может вполне отвечать одной цели и быть совершенно непригодной для решения других задач. Здесь важен вопрос об области применимости модели. Модель *пригодна* только тогда, когда она дает возможность реализовать цели исследования.

Основными методами оценки адекватности и пригодности модели являются, безусловно, неформальные (метод экспертного оценивания, соблюдение принципа «здравого смысла» и т. п.). Однако в некоторых случаях удастся формализовать эту процедуру. В частности, весьма полезными оказываются различные статистические методы, спектральный анализ и др.

Итак, модель идентифицирована, верифицирована, проверена на адекватность. Если все этапы выполнены успешно, то она является готовым инструментом исследования поставленной проблемы и можно переходить к последнему этапу имитационного моделирования – проведению имитационного экс-

перимента, который сопровождается, с одной стороны, планированием эксперимента, а с другой – обработкой результатов этого эксперимента.

Эксперименты делятся по цели исследования на два основных типа: дескрипторные и оптимизационные. Эксперименты первого типа проводятся в целях исследования объекта. Другой тип включает эксперименты, направленные на выявление наилучших стратегий управления исходным объектом.

Результаты имитационных экспериментов должны быть обработаны специальными методами и представлены пользователю в удобном для него виде.

### 2.1.3. Планирование имитационных экспериментов

Проведение имитационного эксперимента – один из главных этапов имитационного исследования, включающий планирование эксперимента, расчеты по модели и обработку результатов эксперимента. Сразу же возникает вопрос о том, при каких внешних воздействиях проводить расчеты, сколько расчетов проводить для того, чтобы быть уверенным в достоверности полученного решения, и т. д. Все эти проблемы могут быть решены в процессе планирования эксперимента.

*Цель эксперимента* – установить связь между воздействиями на модель и ее откликом на это воздействие. На этом этапе модель можно представить в виде  $y = f(x)$ , где  $x$  – воздействие на модель или фактор;  $y$  – результат воздействия или реакция;  $f$  – поверхность реакции.

В общем случае  $x$  и  $y$  есть вектор-функции, зависящие от времени. Любой имитационный эксперимент в этом случае может быть направлен либо на исследование поверхности реакции (*задачи прогнозирования*, например), либо на поиск максимума или минимума поверхности реакции в некотором пространстве факторов (*задачи оптимального управления объектом* и т. п.).

Факторы могут быть либо количественными, либо качественными. Рассмотрим только факторы первого типа.

Пусть для простоты поверхность реакции описывается функцией, зависящей от двух количественных факторов:

$$f = f(x_1, x_2),$$

причем  $x_1$  и  $x_2$  могут принимать дискретные фиксированные значения из областей  $X^1$  и  $X^2$ . Значения фактора назовем уровнем, а совокупность всех возможных пар  $(x_1, x_2)$  – полным факторным планом (рис. 2.4).

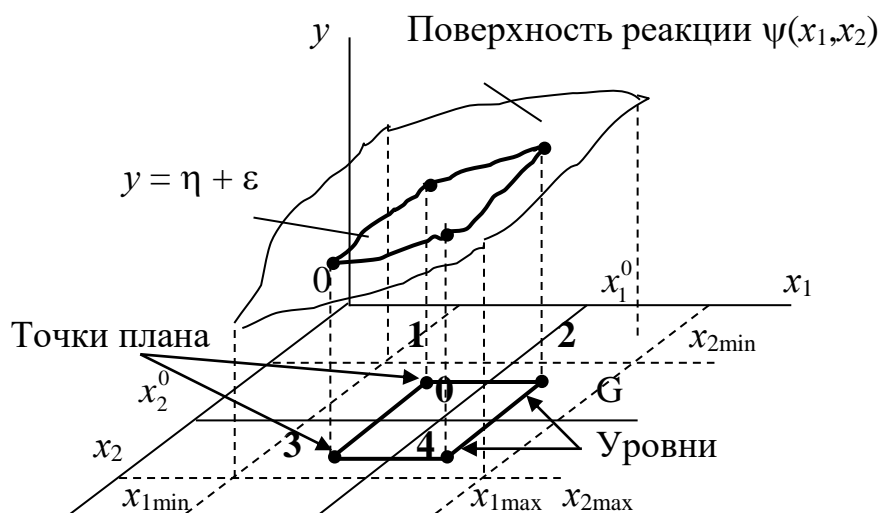


Рис. 2.4. Полный факторный план

Чем больше точек плана будет рассмотрено, т. е. чем полнее построен план, тем точнее представления о виде поверхности реакции. Однако, несмотря на это, применение полных факторных планов ограничено и возможно лишь в случае незначительного числа факторов и их уровней. Более часто используются неполные факторные планы, требующие меньшего числа точек плана и не приводящие при этом к ощутимым потерям информации о поверхности реакции. Здесь в основном исследуются несколько главных факторов, а неполные факторные планы применяются для «отсеивания» несущественных факторов. Процедура отсеивания состоит в последовательном построении неполных планов.

Рассмотрим, например, двухфакторную модель

$$f = f(x_1, x_2),$$

где факторы  $x_1, x_2$  имеют не более 2 уровней каждый. Сначала имитационный эксперимент проводится для начальных значений этих факторов  $(x_1^0, x_2^0)$ , а затем задается некоторое фиксированное изменение каждого уровня  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , где



$\delta_1 = \frac{x_1^0}{n}$ ,  $\delta_2 = \frac{x_2^0}{n}$ ,  $n$  – число уровней для  $x_1$  и  $x_2$  (обычно одинаковое), и строятся неполные факторные планы. Реализация этих планов дает четыре точки поверхности реакции  $f_{+\delta_1}^1$ ,  $f_{-\delta_1}^1$ ,  $f_{+\delta_2}^2$ ,  $f_{-\delta_2}^2$ , по которым можно судить о степени влияния каждого фактора. Так, если

$$|f_{+\delta_1}^1 - f_{-\delta_1}^1| > |f_{+\delta_2}^2 - f_{-\delta_2}^2|,$$

то  $x_1$  является более существенным фактором, и наоборот.

Еще одна типичная задача планирования эксперимента состоит в аппроксимации истинной поверхности реакции некоторой функцией  $\varphi$ , зависящей от тех же факторов. Как правило, удастся построить линейную зависимость

$$\varphi = \sum_{i=1}^k a_i x_i + a_0, \text{ где } a_i - \text{коэффициенты линейного многочлена.}$$

Пусть, например, количество факторов  $k = 2$ . Тогда для построения полинома

$$\varphi = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0$$

требуется проведение имитационного эксперимента по полному двухфакторному плану с уровнями  $x_1^0 \pm \delta_1$ ,  $x_2^0 \pm \delta_2$ .

В случае неудовлетворительной аппроксимации есть возможность строить полиномы более высокой степени. Например, полином второй степени

$$\varphi = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + a_{112} x_1^2 x_2 + a_{122} x_1 x_2^2 + a_{1122} x_1^2 x_2^2.$$

Его коэффициенты находятся на основе новых экспериментов за счет дополнительных уровней. Процесс продолжается до тех пор, пока аппроксимация не даст удовлетворительных результатов.

Описанный метод называется методом поверхности реакции.

Более узкой является проблема поиска экстремумов поверхности реакции, для решения которой используются известные методы оптимизации на заданном множестве значений факторов. Среди них отметим метод наискорейшего спуска (или подъема), который состоит в исследовании поверхности реакции в окрестности некоторой точки с помощью линейных аппроксимирующих по-

верхностей-гиперплоскостей. Такие гиперплоскости обычно строятся с помощью простых экспериментов, как правило, однофакторных (рис. 2.5).

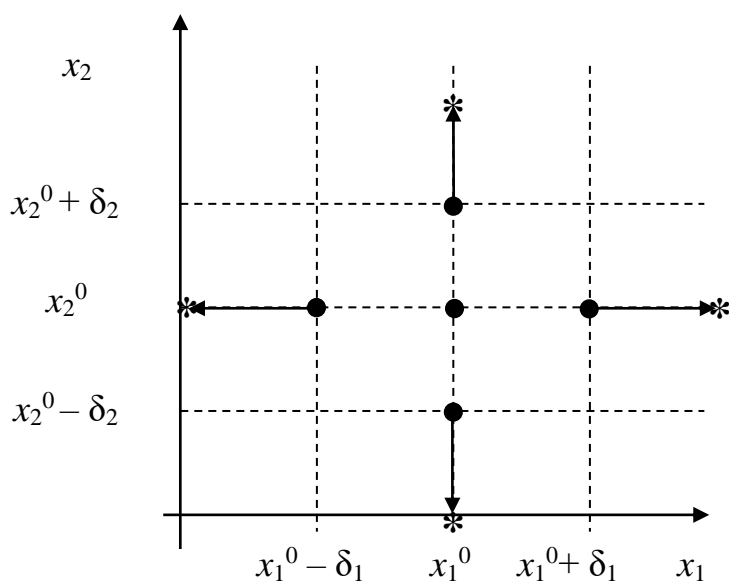


Рис. 2.5. Однофакторный эксперимент:

• – начальные изменения; \* – дополнительные изменения

По построенной гиперплоскости определяется направление движения к точке оптимума, а затем в этом направлении делается небольшой «шаг». Далее процедура повторяется.

Метод наискорейшего спуска не гарантирует минимума. Если допустить, что поверхность реакции имеет несколько локальных минимумов, то целесообразно несколько раз применять этот метод, отталкиваясь всякий раз от сильно отличающихся начальных условий.

Заметим, что линейная аппроксимация вблизи точки оптимума оказывается неэффективной. В окрестности точки оптимума, где поверхность реакции почти стационарна, используется аппроксимация более высокого порядка, например квадратичным полиномом.

Все перечисленные методы планирования эксперимента относятся к детерминированным моделям. Для стохастических моделей однократная реализация построенного плана не позволяет получить желаемую информацию об изученной поверхности реакции. В этом случае необходимо несколько раз реализовывать один и тот же план с различными начальными состояниями генерато-

ра случайных чисел (каждая реализация называется репликой). Определение объема выборки (количества реплик) в имитационном эксперименте представляет собой очень трудную, но важную задачу. С одной стороны, увеличение объема ведет к увеличению затрат машинного времени и тем самым денежных средств. С другой стороны, чем больше количество реплик, тем более достоверна информация, полученная с помощью модели, и меньше возможные потери, обусловленные использованием недостоверной информации. Минимизация суммарных потерь всякий раз осуществляется с помощью методов статистического анализа и методов оптимизации.

## 2.2. Классификация методов теории вероятностей и математической статистики

Вероятностные (стохастические) модели описывают ситуации, в которых похожие причины приводят к различным следствиям, т. е. имеет место элемент случайности. Для построения вероятностной модели необходимо знать, какие величины можно считать случайными, а какие – неслучайными; какой характер имеют законы распределения случайных величин и т. д.

Вероятностные модели можно разделить на две большие группы (рис. 2.6) [7]:

- математическая модель, в которой можно точно указать законы распределения случайных величин, является *теоретико-вероятностной*;
- математическая модель, в которой заранее нельзя указать законы распределения случайных величин, является *статистической*.

По степени сложности вероятностные модели делятся на три уровня (рис. 2.6). Простейшие теоретико-вероятностные модели первого уровня – *случайное событие* (СС) и *случайная величина* (СВ), являющиеся соответственно качественной и количественной характеристиками проведенного испытания.

СС может быть простейшим (элементарным) или сложным (выраженным через элементарные). Для описания вероятностных свойств простейшего слу-

чайного события  $A$  используется стандартная формула классической вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где  $m$  – число случаев из пространства элементарных событий, благоприятных событию  $A$ ;  $n$  – общее число случаев, содержащееся в пространстве элементарных событий.

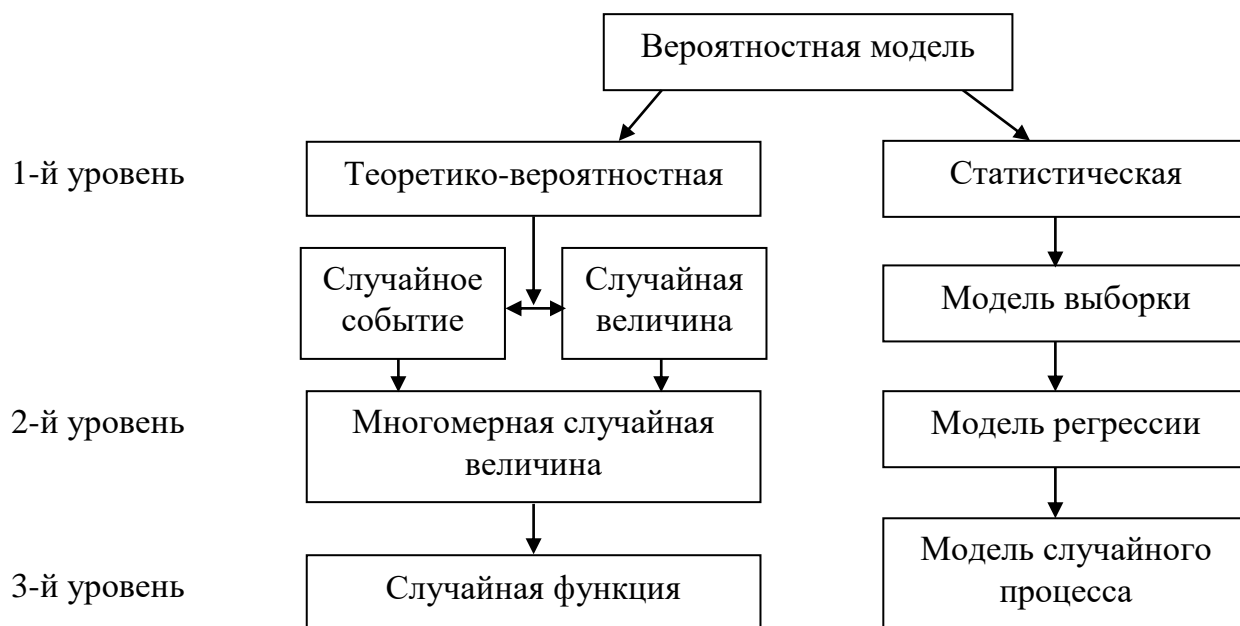


Рис. 2.6. Классификация вероятностных моделей

Геометрическая форма классической формулы имеет вид

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(D)},$$

где  $\mu(A)$  – мера области благоприятных случаев  $A$ ;  $\mu(D)$  – мера области всех случаев  $D$ . При этом  $A \subseteq D$ .

Для расчета вероятности используются теоремы сложения и умножения вероятностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B);$$

$$P(A \cdot B) = P(A/B) \cdot P(B),$$

где  $P(A/B)$  – условная вероятность события  $A$  при условии, что событие  $B$  произошло.

Пусть  $\{H_i\}_{i=1}^n$  – полная несовместная группа событий (гипотез), тогда для определения вероятности сложных событий используется формула полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i),$$

где  $P(H_i)$  – вероятность гипотезы  $H_i$ ;  $P(A/H_i)$  – условная вероятность события  $A$  при выполнении гипотезы  $H_i$ .

СС и СВ связаны между собой через пространство элементарных событий. При этом вероятностные свойства СВ дискретного типа описываются функцией дискретного аргумента

$$p_i = f(x_i),$$

где  $x_i$  – реализация СВ  $X$ ;  $p_i$  – соответствующая ей вероятность, а вероятностные свойства СВ непрерывного типа описываются функцией  $f(x)$  (плотностью распределения), определенной на всей числовой оси, неотрицательной и нормированной на области определения.

Так, например, в биномиальном законе распределения, реализуемом в схеме независимых испытаний, пространство элементарных событий дискретной СВ  $X$  есть конечное множество целых чисел, включая 0, т. е.

$$\Omega(X) = \{0, 1, 2, \dots, n\},$$

а вероятности значений рассчитываются по формуле Бернулли

$$P(X = n) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где  $m = \overline{0, n}$ ;  $C_n^m$  – число сочетаний из  $n$  по  $m$ ;  $p$  – вероятность появления события в отдельном испытании;  $q = 1 - p$ .

Нормальный закон распределения – один из основных для непрерывной СВ  $X$  задается плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}},$$

определенной для всех  $x$  и удовлетворяющей условиям  $f(x) > 0$  и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Здесь  $\mu_x$  и  $\sigma_x$  – соответственно математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение СВ  $X$ . Отметим, что эти числовые характеристики являются основными для одномерной СВ  $X$ , имеющей любой закон распределения.

Универсальной формой закона *распределения*, имеющей место как для дискретной, так и для непрерывной СВ, является функция распределения

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

Второй уровень теоретико-вероятностной модели, обобщающей модель одномерной СВ, связан с системой случайных величин (многомерной СВ), вероятностные свойства которой не исчерпываются свойствами отдельных величин, образующих систему, а описываются также зависимостью между ними.

Так, для двумерной непрерывной СВ  $(X, Y)$  должны рассматриваться частные плотности распределения  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$ , а также совместная плотность  $f(x, y)$ . При этом

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy;$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx.$$

Однако  $f(x, y)$  не всегда может быть определена через  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$ . Для  $n$ -мерной СВ  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  функции распределения имеют гораздо более громоздкий вид, поэтому на модельном уровне при описании объекта обычно используют набор числовых характеристик.

Для двумерной случайной величины  $(X, Y)$  – это  $\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, r_{xy}$ ; для  $n$ -мерной случайной величины – это  $\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}, \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \dots, \sigma_{x_n}$ , а также корреляционная матрица  $\|r_{ij}\|$ , где  $r_{ij}$  – коэффициент корреляции между случайными величинами  $X_i$  и  $X_j$ .

Обобщением модели  $n$ -мерной СВ служит модель третьего уровня – случайная функция (СФ)  $X(t)$ , где  $t$  – вещественный параметр.

Графически СФ представима в виде набора реализаций  $x_i(t)$ , где каждая  $x_i(t)$  – неслучайная функция ( $i = \overline{1, n}$ ) (рис. 2.7). При фиксированном  $t = t_0$  имеем сечение СФ  $X(t_0)$ , представляющее собой одномерную СВ.

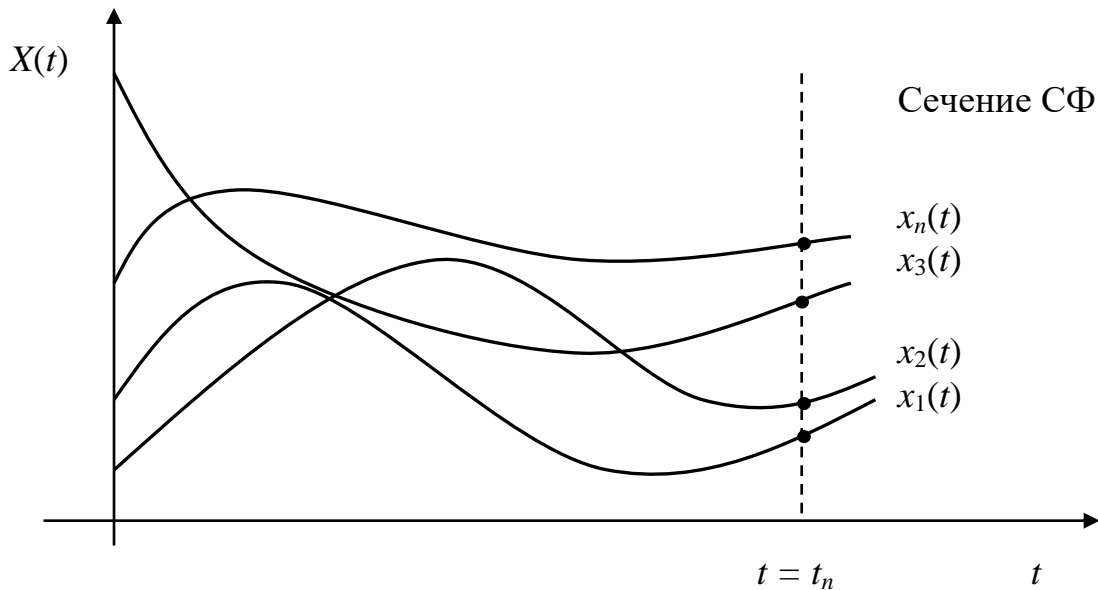


Рис. 2.7. Случайная функция  $X(t)$  в виде набора реализации  $x_i(t)$

Таким образом, полное вероятностное описание СФ связано с заданием бесконечномерного закона распределения всех ее сечений.

Обычно на модельном уровне ограничиваются рассмотрением СФ в рамках корреляционной теории, т. е. рассмотрением ее математического ожидания  $\mu_x(t)$  и корреляционной функции  $K_x(t_1, t_2)$ , являющихся неслучайными функциями соответственно одного и двух аргументов.

Важным частным случаем модели СФ является модель стационарной СФ, для которой

$$\begin{cases} \mu_x(t) = \text{const}; \\ K_x(t_1, t_2) = K_x(\tau), \end{cases}$$

где  $\tau = t_1 - t_2$ .

Каждому из уровней теоретико-вероятностных моделей соответствует своя статистическая модель.

Поскольку математическая статистика занимается обработкой информации при наличии неопределенности, то в основу построения статистической модели должны быть положены некоторые допущения. В зависимости от их математической сути различают три основные модели математической статистики:

- 1) модель выборки;
- 2) модель регрессии;
- 3) модель случайного процесса.

Каждая из них связана с определенным исходным материалом и решает свои специфические задачи. Однако все они имеют дело с большим объемом информации и достаточно трудоемкими методами ее обработки. Поэтому реализация статистических моделей, для которых разработаны стандартные программы определения статистических законов распределения, вычисления статистических характеристик СВ, проверки гипотез по критериям согласия, расчета коэффициентов регрессии, статистических характеристик случайных процессов и т. д., осуществляется, как правило, на компьютере.

Простейшей статистической моделью является одномерная *модель выборки*, в которой предполагается, что исходный статистический материал есть реализация одной СВ  $X$  с законом распределения  $F(x)$ .

Основой для построения модели служит простая случайная выборка, представленная в виде ряда наблюдений (табл. 2.1).

Таблица 2.1

$i$	1	2	...	$n$
$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$

Например, при измерении расстояния до цели каким-либо прибором за счет чисто случайных причин результат изменяется от опыта к опыту.

Реализация модели связана с построением эмпирических (статистических) законов распределения:  $f^*(x)$  – статистическая плотность распределения;  $F^*(x)$  – статистическая функция распределения, аналогичная теоретическим за-



конам для СВ  $X$ . Графическим представлением  $f^*(x)$  является гистограмма, а  $F^*(x)$  – кривая накопленных частот.

Найденные законы содержат элемент случайности, так как они определены по конечному числу наблюдений. Поэтому для уточнения модели следует провести сглаживание статистического ряда, т. е. выбрать теоретический закон распределения, наилучшим образом описывающий исходный материал. Для этого используются критерии согласия Пирсона, Колмогорова и др.

В некоторых ситуациях ограничиваются получением точечных и интервальных оценок основных числовых характеристик  $\mu_x$  и  $\sigma_x^2$ .

Если результаты наблюдений зависят от некоторого параметра и изменяются от измерения к измерению не только за счет случайных причин, но и за счет существенных, то модель выборки неприменима к данному ряду наблюдений. В этом случае используют *модель регрессии*, которая предполагает, что исходный статистический материал представляет собой реализации СВ, изменяющейся в зависимости от какого-либо параметра (времени, пространственной координаты и т. д.).

Исходный ряд наблюдений имеет вид, приведенный в табл. 2.2, где  $t_n$  – значение параметра ( $i = 1, \dots, n$ );  $x_n$  – значение СВ, соответствующее данному значению параметра. Например, изменение температуры воздуха в данной точке в данный момент времени зависит от высоты.

Таблица 2.2

$t_i$	$t_1$	$t_2$	...	$t_n$
$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$

Основным предположением модели регрессии, сводящим ее к рассмотренной ранее модели выборки, является следующее: реализации СВ могут быть представлены в виде суммы

$$x_i = f(t_i) + \delta_i,$$

где  $f(t_i)$  – неслучайная функция аргумента  $t$ ;  $\delta_i$  – ошибки, содержащиеся в выборке.

Другими словами, предполагается, что ряд наблюдений  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  является реализацией системы независимых СВ  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , частные распределения которых одинаковы, за исключением математического ожидания, для которого

$$\mu_{x_i} = f(t_i).$$

Функция  $f(t)$  называется сглаживающей, а ее график – линией регрессии. Основной задачей модели регрессии является определение линии регрессии  $f(t)$  и оценка точности результата (рис. 2.8).

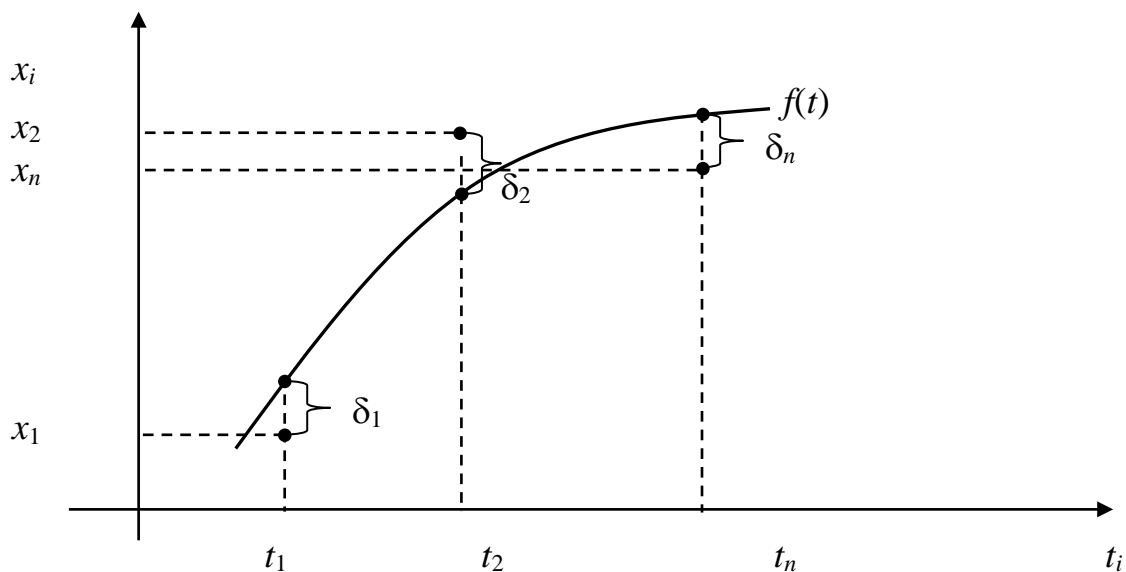


Рис. 2.8. Линия регрессии  $f(t)$  и оценка точности результата  $\delta$

Сглаживающую функцию обычно задают параметрически:  $f(a_1, a_2, \dots, a_m, t)$ , где вид функции известен и вычислению подлежат только параметры  $a_1, a_2, \dots, a_m$  ( $m < n$ ). Для их определения используется стандартная процедура метода наименьших квадратов (МНК), основанная на соотношении

$$\sum_{i=1}^n [x_i - f(a_1, a_2, \dots, a_m, t)]^2 = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \rightarrow \min,$$

т. е. сумма квадратов отклонений результатов наблюдений от сглаживающей кривой должна быть наименьшей.

В большинстве прикладных задач ограничиваются линейной регрессией.

*Модель случайного процесса* является обобщением как модели выборки, так и модели регрессии. Исходный ряд наблюдений зависит от параметра так

же, как и в модели регрессии, но СВ ( $X_1, X_2, \dots, X_n$ ), реализацией которых является данный ряд, зависимы и также зависимы случайные ошибки  $\delta_i$  в случайных измерениях.

Основное предположение модели случайного процесса состоит в том, что ряд наблюдений, зависящих от параметра, есть значения функции  $x(t)$ , являющейся реализацией СФ  $X(t)$ , распределение и характеристики которой заранее неизвестны.

Пусть имеется  $m$  рядов наблюдений, проведенных в одних и тех же условиях. Их можно свести в таблицу, в которой в строках расположены реализации, а в столбцах – сечения по параметру  $t$  (табл. 2.3). Данными этой таблицы могут быть, например, многолетние метеорологические наблюдения за температурой воздуха в каком-нибудь пункте в определенный месяц года.

Таблица 2.3

$x(t)$	$t$			
	$t_1$	$t_2$	...	$t_n$
$x_1(t)$	$x_1(t_1)$	$x_1(t_2)$	...	$x_1(t_n)$
$x_2(t)$	$x_2(t_1)$	$x_2(t_2)$	...	$x_2(t_n)$
...	...	...	...	...
$x_m(t)$	$x_m(t_1)$	$x_m(t_2)$	...	$x_m(t_n)$

Обработка построенной таблицы может вестись как по «столбцам» (модель выборки), так и по «строкам» (модель регрессии). Полученные при различных значениях аргумента  $t$  результаты числовых характеристик в дальнейшем аппроксимируются по МНК аналитическими выражениями.

Если по каким-либо причинам получение нескольких статистических рядов невозможно, то для применения модели случайного процесса требуются дополнительные предположения о его характере (например, стационарность процесса).

При *статистическом* моделировании применяется метод статистических испытаний – *метод Монте-Карло*. При этом результаты, полученные при вос-

произведении на имитационной модели процесса функционирования системы, являются реализациями случайных величин и функций, и для нахождения характеристик процесса требуется его многократное воспроизведение с последующей статистической обработкой информации.

Основная идея *метода Монте-Карло* заключается в следующем. Пусть необходимо определить значение детерминированной величины  $y$ . Допустим, ее можно представить в виде детерминированной функции

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N),$$

где  $x_i$  – детерминированная переменная.

Заменим переменные  $x_1, x_2, \dots, x_N$  на случайные функции с известным законом распределения. Тогда значение  $y$  заменяется на случайную величину  $Y$ . Для решения задач такого вида применяется следующий алгоритм:

- 1) по каждой из величин  $x_1, x_2, \dots, x_N$  производится случайное испытание, в результате которого определяется некоторое конкретное значение случайной величины  $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{Ni}$ ;
- 2) с помощью найденных величин, определяется одно частное значение  $y_i$  по вышеприведенной зависимости;
- 3) предыдущие операции повторяются  $N$  раз, в результате чего определяется  $N$  значений случайной величины  $Y$ ;
- 4) на основании  $N$  значений величины  $Y$  находится ее эмпирическая функция распределения, математическое ожидание  $\mu_Y$  и дисперсия  $\sigma_Y^2$ .

При обработке результатов моделирования приходится довольствоваться лишь некоторыми оценками моментов, полученными на конечном числе реализации  $N$ . При независимых наблюдениях значений случайной величины  $Y$  в качестве таких оценок используются

$$\bar{Y} = \tilde{\mu}_Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i ;$$

$$S_b^2 = \tilde{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 ,$$

где  $\bar{Y}$  и  $S_b^2$  – выборочное среднее и выборочная дисперсия соответственно. Знак  $\sim$  над  $\tilde{\mu}_Y$  и  $\tilde{\sigma}_Y^2$  означает, что эти выборочные моменты используются в качестве оценок математического ожидания  $\mu_Y$  и дисперсии  $\sigma_Y^2$ .

## 2.3. Описание работы программного модуля SIANRG

### при статистическом анализе разброса параметров объекта САР с ПИД-регулятором

Напомним, что целью моделирования САР является создание системы, удовлетворяющей определенным требованиям, которые формулируются в виде качественных показателей. Качество функционирования САР определяется по переходной характеристике  $h(t)$  – реакции системы на типовое воздействие в виде единичной ступенчатой функции  $1(t)$  – или некоторыми параметрами ПФ замкнутой системы.

Для синтеза и анализа одноконтурных САР (см. рис. 1.1) разработан программный модуль *SIANRG*. В этом модуле реализованы различные математические модели ОУ и блоков регулирования (см. п. 1.2).

Модель ОУ описывается передаточными функциями (1.4), которые характеризуют реакцию выхода системы на управляющее и возмущающее воздействия. В программном модуле *SIANRG* предусмотрена возможность ввода полиномов числителя и знаменателя в трех формах (1.5)–(1.7'). Упрощенная форма ПФ ОУ – (1.8), (1.9). Модель регулятора описывается также передаточными функциями динамических звеньев, соответствующих регулирующим блокам (1.10)–(1.14) или (1.15)–(1.17').

Для составления модели одноконтурной САР проводится синтез, при котором задаются ПФ ОУ, выбирают закон регулирования и определяют настройки блока регулирования (см. п. 1.3).

Анализ САР позволяет определить устойчивость и качество системы по переходному процессу (см. п. 1.2.4). Анализ САР в частотной области позволяет оценить устойчивость замкнутой САР по амплитудно-фазовой частотной ха-

рактеристике (АФЧХ) разомкнутой САР (см. п. 1.2.6). В программном модуле *SIANRG* проверка устойчивости одноконтурной САР осуществляется по критерию Найквиста. Анализ замкнутой САР во временной области позволяет оценить качество устойчивой САР по переходному процессу, вызванному единичным скачком по каналам управления и возмущения (см. п. 1.2.7).

Моделирование в программном модуле *SIANRG* начинается с Главного меню (см. п. 1.3, рис. 1.7). Меню *Синтез* содержит опции, позволяющие последовательно проводить синтез САР: задание параметров объекта, расчет критической настройки регулятора, расчет оптимальных параметров регуляторов (см. п. 1.3, рис. 1.8–1.14). Меню *Анализ* (см. рис. 1.15) содержит опции, позволяющие последовательно проводить анализ ОУ, разомкнутой САР в частотной и временной областях, замкнутой САР по управлению и возмущению (также в частотной и временной областях), разброс параметров объекта, разброс параметров регулятора.

Данный параграф (лабораторная работа № 3) посвящен статистическому анализу разброса параметров САР с ПИД-регулятора (рис. 2.9).

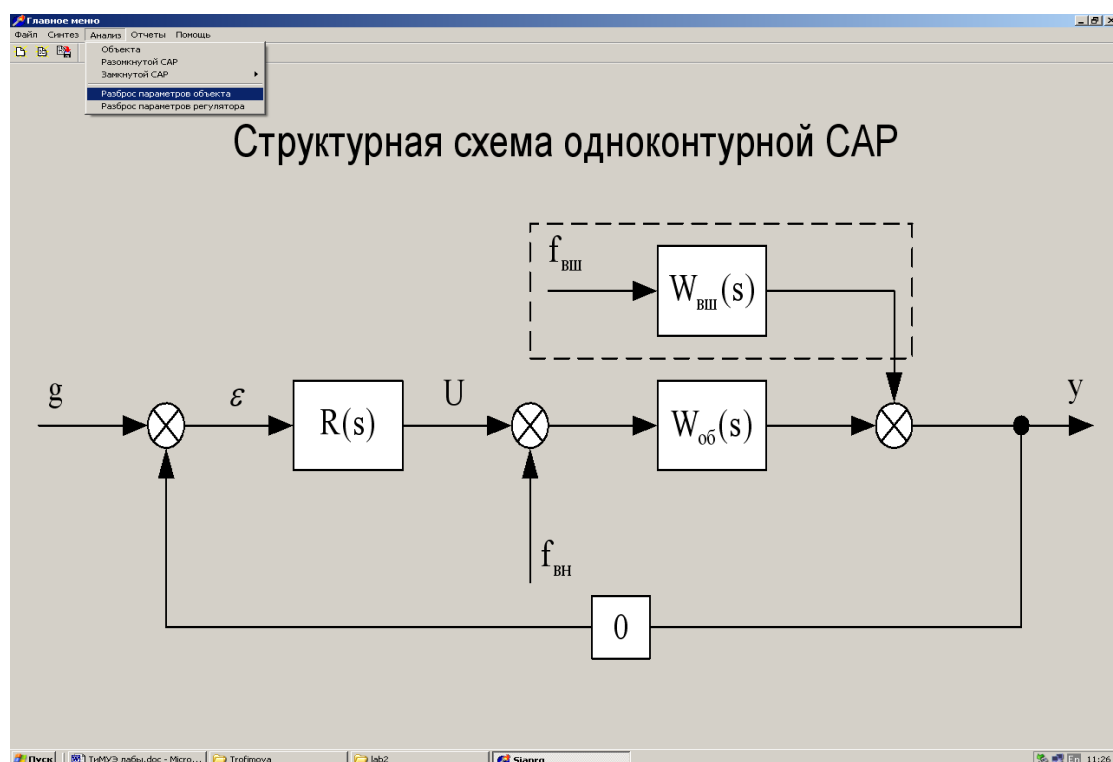


Рис. 2.9. Меню *Анализ/Разброс параметров объекта*

Необходимо провести анализ вероятностных настроек регулятора к случайным вариациям параметров (математического ожидания) объекта.

Выбрав меню *Анализ/Разброс параметров объекта* (рис. 2.9), выберите один из параметров объекта (коэффициент передачи  $k_{об}$ , постоянную времени  $T_{об}$  или транспортное запаздывание  $\tau_{об}$ ), задайте параметры распределения для выбранной случайной величины (математическое ожидание, дисперсию, число точек расчета) и нажмите кнопку *Построить*. На экране появится график нормального распределения выбранного параметра объекта (рис. 2.10). Можно сохранить график, используя в данном меню *Файл/Сохранить график*.

Затем зайдите в меню *Графики/Распределение* (рис. 2.11) и постройте распределение исследуемой величины, выбрав параметр распределения объекта (коэффициент передачи  $k_{об}$ , постоянную времени  $T_{об}$  или транспортное запаздывание  $\tau_{об}$ ), тип анализа САР (по управлению или возмущению) и тип графика: коэффициент усиления  $k_p$ , постоянную интегрирования  $T_i$ , постоянную дифференцирования  $T_d$ .

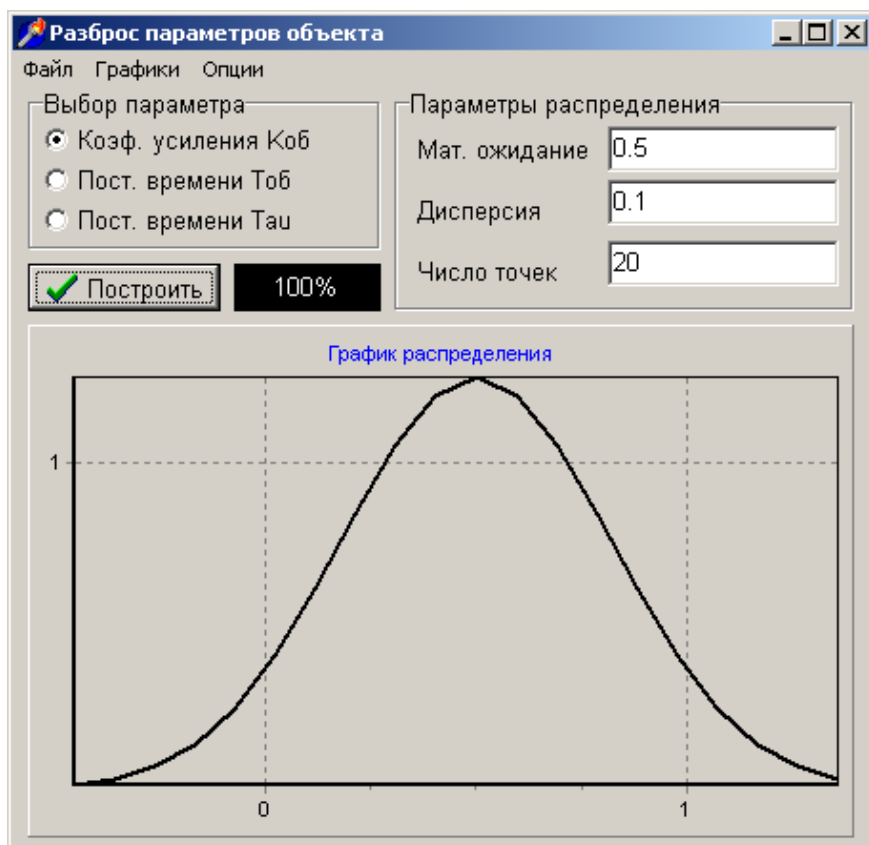


Рис. 2.10. График нормального распределения коэффициента передачи объекта

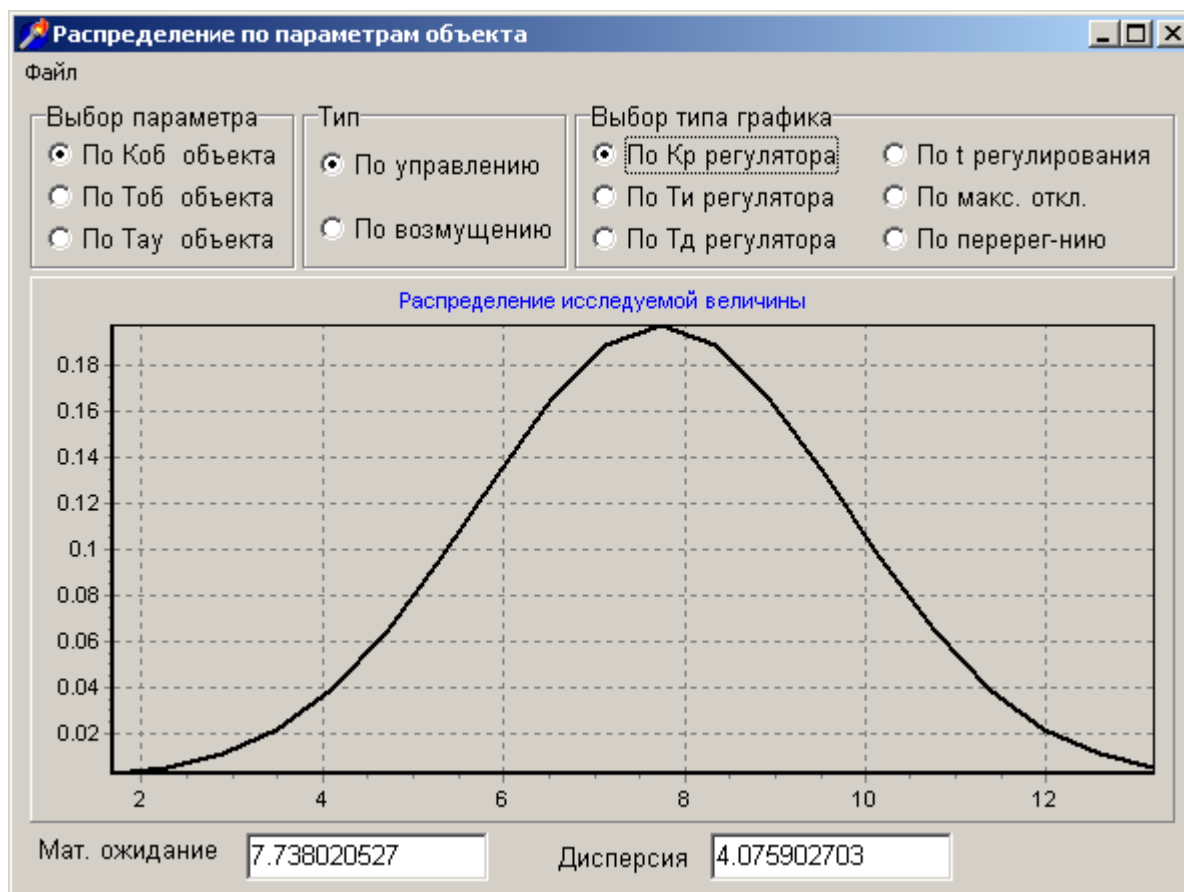


Рис. 2.11. График нормального распределения коэффициента усиления регулятора  $k_p$  при изменении коэффициента передачи объекта

Необходимо провести анализ влияния каждого параметра объекта САР на изменение параметров настроек ПИД-регулятора по отдельности (рис. 2.12–рис. 2.15).

Обязательно сразу сохраните график, используя в данном меню *Файл/Сохранить график* в формате \*.grs, это позволит в дальнейшем правильно оформить отчет с наложением графиков эксперимента. Не забывайте подписывать график. Запомните характеристики распределения исследуемой величины (математическое ожидание и дисперсию).

Таким образом, анализируя чувствительность и качество функционирования устойчивой САР, в данной лабораторной работе, изменяя вероятностные параметры объекта (математическое ожидание), получим вероятностные характеристики настроек регулятора САР.





Рис. 2.12. График нормального распределения постоянной времени объекта

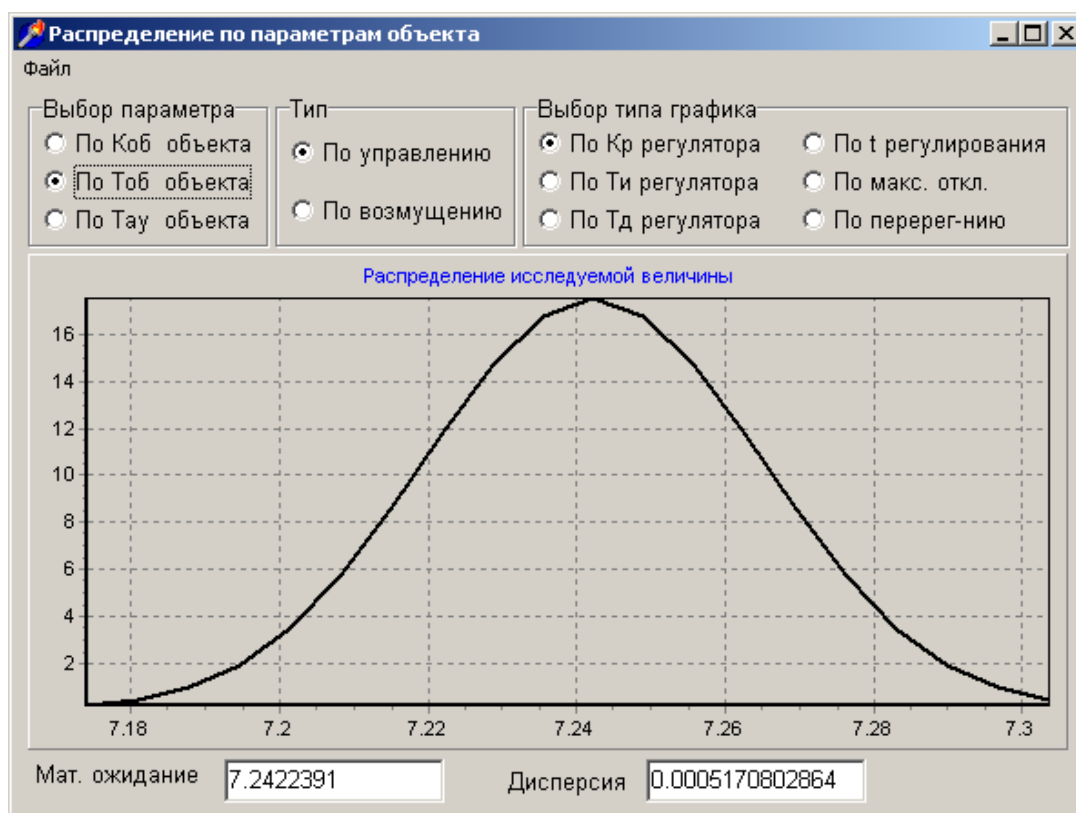


Рис. 2.13. График нормального распределения коэффициента усиления регулятора  $k_p$  при изменении постоянной времени объекта

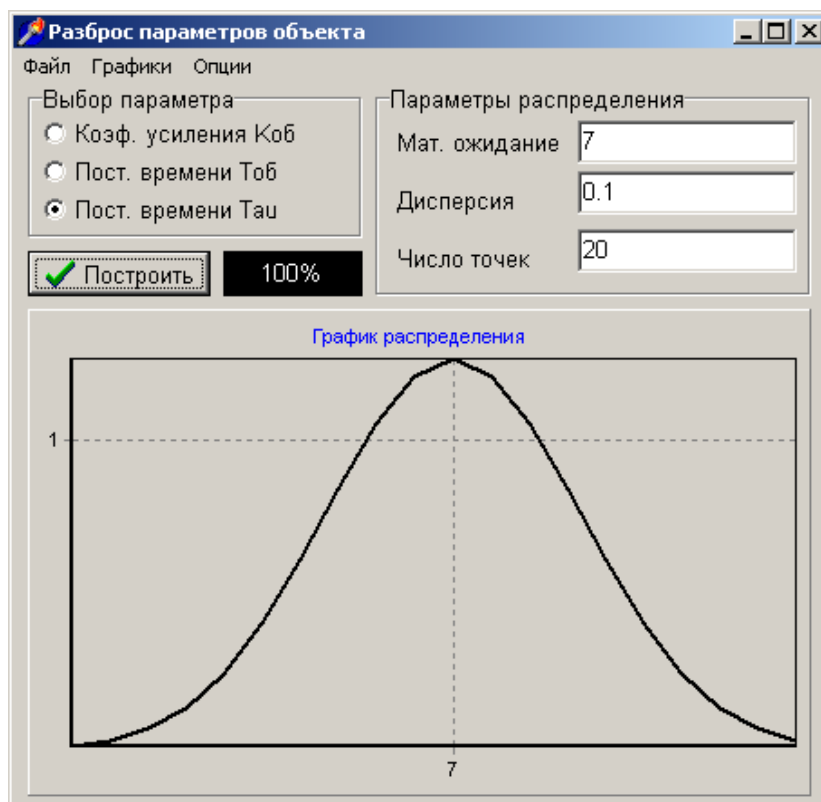


Рис. 2.14. График нормального распределения  
транспортного запаздывания объекта

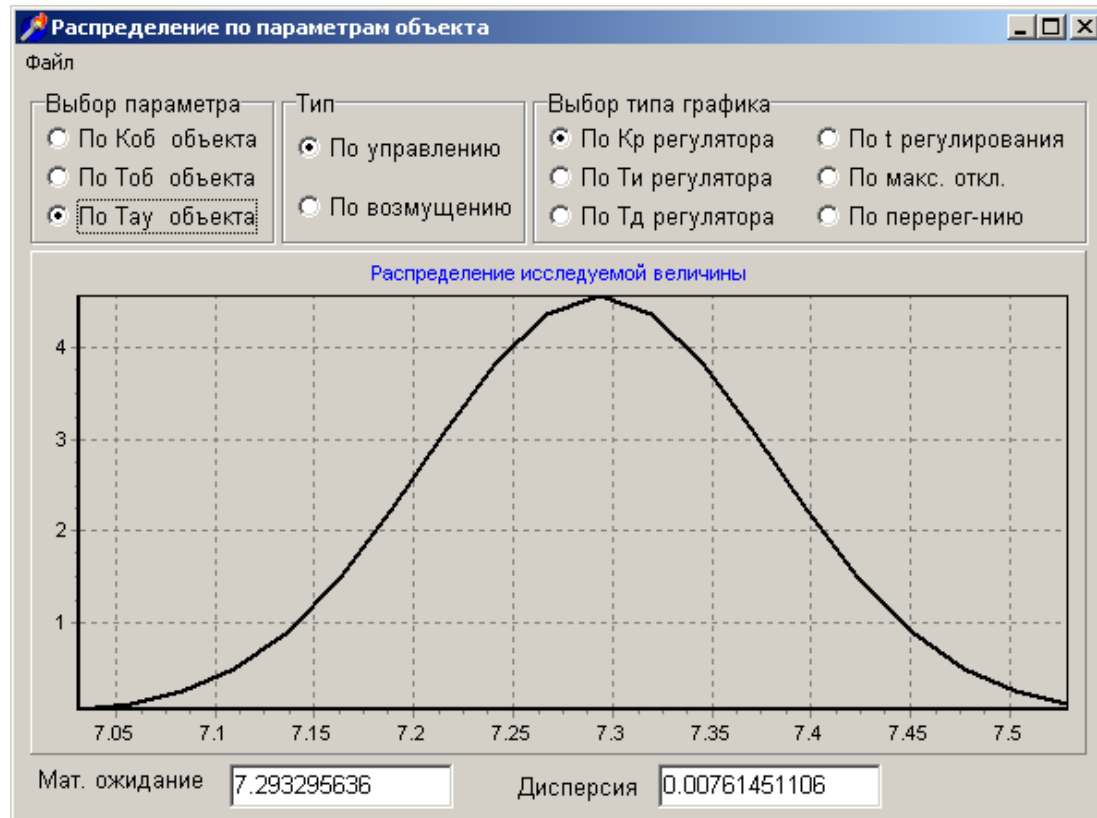


Рис. 2.15. График нормального распределения коэффициента усиления регулятора  $k_p$   
при изменении транспортного запаздывания объекта

Для системы с ПИД-регулятором при проведении однофакторного эксперимента:

- 1) сначала задайте оптимальные значения математического ожидания параметров объекта (базовая точка эксперимента);
- 2) затем изменяйте математическое ожидание коэффициента передачи объекта  $\mu_{k_{об}} = k_{об}^o \pm \Delta k_{об}$  при постоянных значениях математических ожиданий  $\mu_{T_{об}} = T_{об}^o$  и  $\mu_{\tau_{об}} = \tau_{об}^o$  (рис. 2.16–рис. 2.19);
- 3) далее изменяйте математическое ожидание постоянной времени объекта  $\mu_{T_{об}} = T_{об}^o \pm \Delta T_{об}$  при постоянных значениях математических ожиданий  $\mu_{k_{об}} = k_{об}^o$  и  $\mu_{\tau_{об}} = \tau_{об}^o$ ;
- 4) и наконец, изменяйте математическое ожидание транспортного запаздывания объекта  $\mu_{\tau_{об}} = \tau_{об}^o \pm \Delta \tau_{об}$  при постоянных значениях математических ожиданий  $\mu_{k_{об}} = k_{об}^o$  и  $\mu_{T_{об}} = T_{об}^o$ .

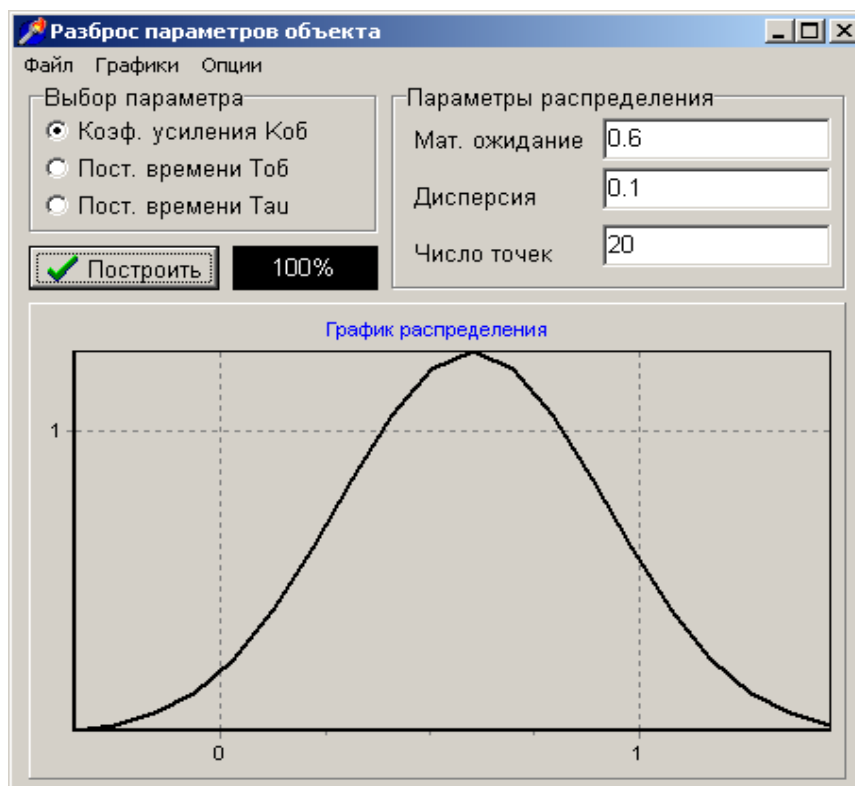


Рис. 2.16. Изменение математического ожидания коэффициента передачи объекта

$$\mu_{k_{об}} = k_{об}^o + \Delta k_{об}$$



Рис. 2.17. Результаты эксперимента влияния варьируемого коэффициента передачи объекта

$$(\mu_{k_{об}} = k_{об}^o + \Delta k_{об}) \text{ на коэффициент усиления регулятора}$$

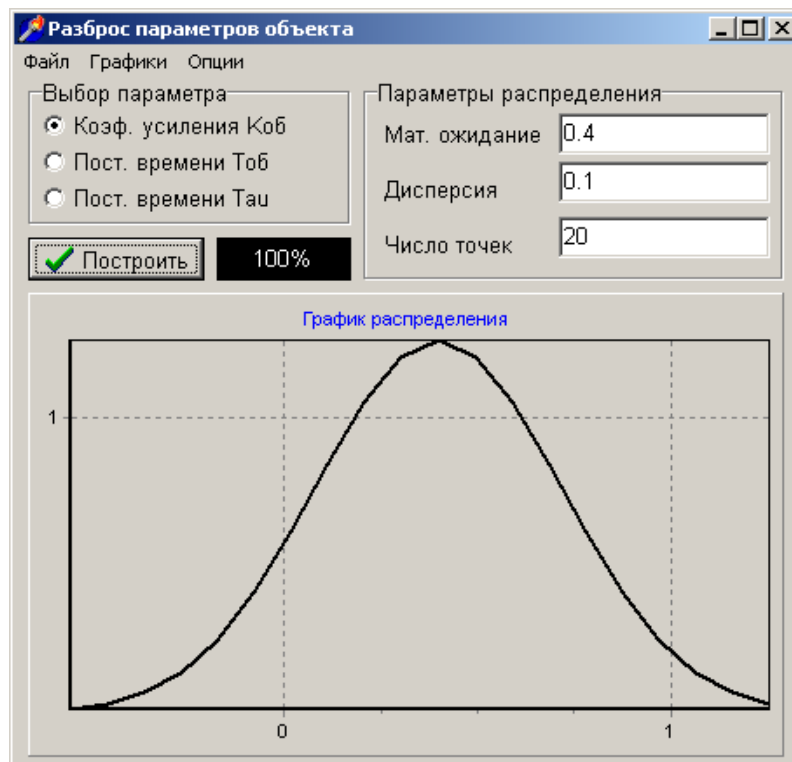


Рис. 2.18. Изменение математического ожидания коэффициента передачи объекта

$$\mu_{k_{об}} = k_{об}^o - \Delta k_{об}$$

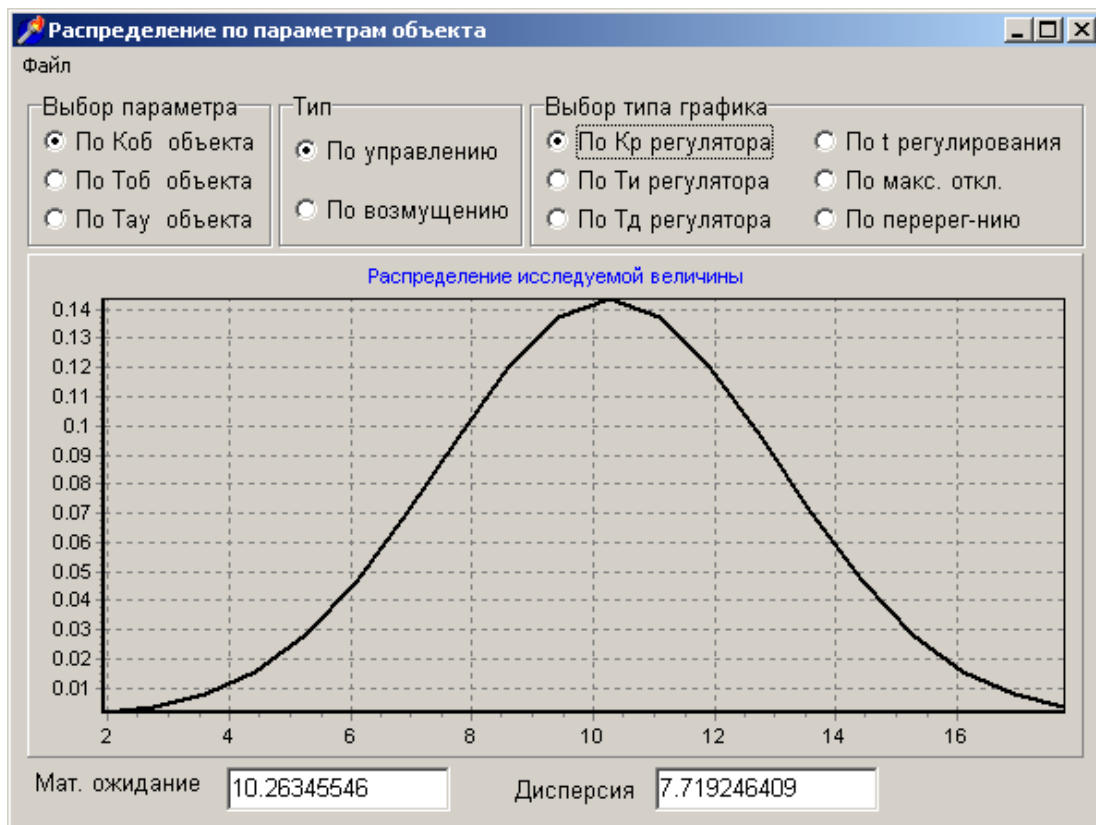


Рис. 2.19. Результаты эксперимента влияния варьируемого коэффициента передачи объекта

$$(\mu_{k_{об}} = k_{об}^o - \Delta k_{об}) \text{ на коэффициент усиления регулятора}$$

При этом дисперсия настроек регулятора остается одинаковой и неизменной для всех параметров.

Каждый раз, анализируя результаты эксперимента, выявляйте закономерности влияния варьируемых параметров объекта на настройки регулятора системы по отдельности.

После проведения однофакторного эксперимента, т.е. при изменении математического ожидания коэффициента передачи объекта  $\mu_{k_{об}}$  (при этом постоянная времени объекта  $T_{об}$  и транспортное запаздывание объекта  $\tau_{об}$  остаются постоянными), у вас получатся семейства характеристик:

- по 3 графика распределения коэффициента усиления регулятора  $k_p$  по управлению при математических ожиданиях, равных  $k_{об}^o$ ,  $k_{об}^o + \Delta k_{об}$ ,  $k_{об}^o - \Delta k_{об}$  (см. рис. 2.11, рис. 2.17, рис. 2.19);

- по 3 графика распределения постоянного интегрирования  $T_{\text{И}}$  по управлению при математических ожиданиях, равных  $k_{\text{об}}^0$ ,  $k_{\text{об}}^0 + \Delta k_{\text{об}}$ ,  $k_{\text{об}}^0 - \Delta k_{\text{об}}$ ;
- по 3 графика распределения постоянной дифференцирования  $T_{\text{Д}}$  по управлению при математических ожиданиях, равных  $k_{\text{об}}^0$ ,  $k_{\text{об}}^0 + \Delta k_{\text{об}}$ ,  $k_{\text{об}}^0 - \Delta k_{\text{об}}$ ;
- по 3 графика распределения коэффициента усиления регулятора  $k_{\text{р}}$  по возмущению при математических ожиданиях, равных  $k_{\text{об}}^0$ ,  $k_{\text{об}}^0 + \Delta k_{\text{об}}$ ,  $k_{\text{об}}^0 - \Delta k_{\text{об}}$  (рис. 2.20);
- по 3 графика распределения постоянного интегрирования  $T_{\text{И}}$  по возмущению при математических ожиданиях, равных  $k_{\text{об}}^0$ ,  $k_{\text{об}}^0 + \Delta k_{\text{об}}$ ,  $k_{\text{об}}^0 - \Delta k_{\text{об}}$ ;
- по 3 графика распределения постоянной дифференцирования  $T_{\text{Д}}$  по возмущению при математических ожиданиях, равных  $k_{\text{об}}^0$ ,  $k_{\text{об}}^0 + \Delta k_{\text{об}}$ ,  $k_{\text{об}}^0 - \Delta k_{\text{об}}$ .

Аналогично получатся семейства графиков при проведении п. 3 и п. 4 однофакторного эксперимента.

Для представления результатов однофакторного эксперимента в виде семейства характеристик воспользуйтесь меню *Отчет / Наложение графиков* (рис. 2.20). Сначала выберите тип графика *Разброс* (в формате \*.grs), затем, нажимая кнопку *Добавить*, вставьте соответствующий график. Если тип графика не соответствует, то график не будет вставлен. Обязательно сразу сохраните каждое семейство графиков в формате \*.bmp. В отчете по лабораторной работе на графиках подписывайте названия и значения осей и указывайте математические ожидания и дисперсии характеристик.

## 2.4. Задания для лабораторной работы № 3

*Цель лабораторной работы № 3* – провести стохастическое моделирование САР, т. е. провести синтез, получив оптимальные настройки регуляторов, а также провести анализ вероятностных характеристик показателей качества к случайным вариациям параметров (математического ожидания) объекта управления.

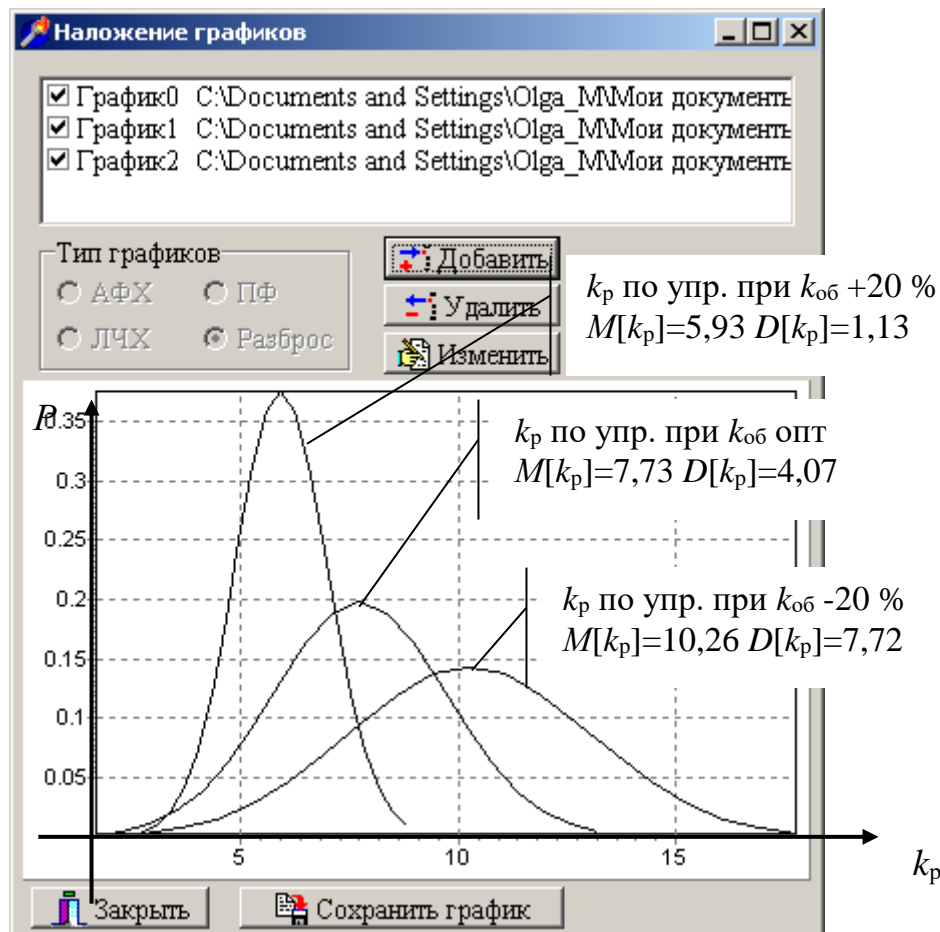


Рис. 2.20. Семейства характеристик распределения коэффициента усиления регулятора  $k_p$  по управлению при математических ожиданиях, равных  $k_{об}^o$ ,  $k_{об}^o + \Delta k_{об}$ ,  $k_{об}^o - \Delta k_{об}$

1. Запустить программу *C:\Users\student\TuMUЭ\Sianrg.exe*, которая используется для моделирования САР.
2. Составить параметрическую модель САР, для чего следует найти базовые (оптимальные) настройки для ПИД-регулятора  $k_p^o$ ,  $T_{и}^o$  и  $T_{д}^o$  методом Циглера-Никольса. Данные по передаточной функции (1.8) объекта управления  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$  взять из табл. 1.1. Номер варианта уточнить у преподавателя.
3. Провести анализ показателей качества САР при разбросе параметров объекта управления. Зафиксировать графики распределений, математическое ожидание и дисперсию настроек регулятора по управлению и возмущению: коэффициента усиления регулятора  $k_p$ , постоянного интегрирования  $T_{и}$ , постоянной дифференцирования  $T_{д}$ . Далее эти параметры называются базовыми настройками регулятора САР.

4. В целях определения чувствительности системы к стохастическим вариациям параметров объекта регулятора провести однофакторный эксперимент. В качестве факторов эксперимента выбрать параметры объекта  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$ , а именно математическое ожидание. Значение дисперсии принять по умолчанию равной 0,1.

Сначала изменяйте математическое ожидание коэффициента передачи объекта  $\mu_{k_{об}} = k_{об}^o \pm \Delta k_{об}$  при постоянных значениях математических ожиданий  $\mu_{T_{об}} = T_{об}^o$  и  $\mu_{\tau_{об}} = \tau_{об}^o$ . Далее изменяйте математическое ожидание постоянной времени объекта  $\mu_{T_{об}} = T_{об}^o \pm \Delta T_{об}$  при постоянных значениях математических ожиданий  $\mu_{k_{об}} = k_{об}^o$  и  $\mu_{\tau_{об}} = \tau_{об}^o$ . Наконец, изменяйте математическое ожидание транспортного запаздывания объекта  $\mu_{\tau_{об}} = \tau_{об}^o \pm \Delta \tau_{об}$  при постоянных значениях математических ожиданий  $\mu_{k_{об}} = k_{об}^o$  и  $\mu_{T_{об}} = T_{об}^o$ .

Уровень вариации параметров объекта  $\Delta$  может быть равен  $\pm 10$ ,  $\pm 20$ ,  $\pm 30$  % (уточнить у преподавателя).

5. Результаты синтеза и анализа САР представить нижеследующим образом.

5.1. Исходные данные ОУ, базовые (оптимальные) настройки для ПИД-регулятора  $k_p^o$ ,  $T_{и}^o$  и  $T_{д}^o$ .

5.2. Результаты однофакторного эксперимента по управлению и возмущению представить в виде семейства трех графиков распределения настроек регулятора при изменении математических ожиданий параметров объекта

$$k_{об}^o, k_{об}^o + \Delta k_{об}, k_{об}^o - \Delta k_{об};$$

$$T_{об}^o, T_{об}^o + \Delta T_{об}, T_{об}^o - \Delta T_{об};$$

$$\tau_{об}^o, \tau_{об}^o + \Delta \tau_{об}, \tau_{об}^o - \Delta \tau_{об}.$$

Обязательно зафиксировать математическое ожидание и дисперсию показателей качества.



5.3. Выявить закономерность влияния варьируемых параметров объекта на параметры регулятора системы и написать выводы.

## **2.5. Описание работы программного модуля SIANRG при статистическом анализе разброса настроек (математического ожидания) регулятора САР с ПИД-регулятором**

Моделирование в программном модуле *SIANRG* начинается с Главного меню (см. п. 1.3, рис. 1.7). Меню *Синтез* содержит опции, позволяющие последовательно проводить синтез САР: задание параметров объекта, расчет критической настройки регулятора, расчет оптимальных параметров регуляторов (см. п. 1.3, рис. 1.8–1.14). Меню *Анализ* (см. рис. 1.15) содержит опции, позволяющие последовательно проводить анализ ОУ, разомкнутой САР в частотной и временной областях, замкнутой САР по управлению и возмущению (также в частотной и временной областях), разброс параметров объекта, разброс параметров регулятора.

Данный параграф (лабораторная работа № 4) посвящен статистическому анализу разброса параметров регулятора САР с ПИД-регулятором (рис. 2.21). Необходимо провести анализ вероятностных характеристик показателей качества к случайным вариациям настроек (математического ожидания) регулятора.

Выбрав меню *Анализ/Разброс параметров регулятора* (рис. 2.21), выберите один из параметров регуляторов (коэффициент усиления  $k_p$ , постоянную интегрирования  $T_d$  или постоянную дифференцирования  $T_d$ ), задайте параметры распределения для выбранной случайной величины (математическое ожидание, дисперсию, число точек расчета) и нажмите кнопку *Построить*. На экране появится график нормального распределения выбранного параметра регулятора (рис. 2.22). Можно сохранить график, используя в данном меню *Файл/Сохранить график*.

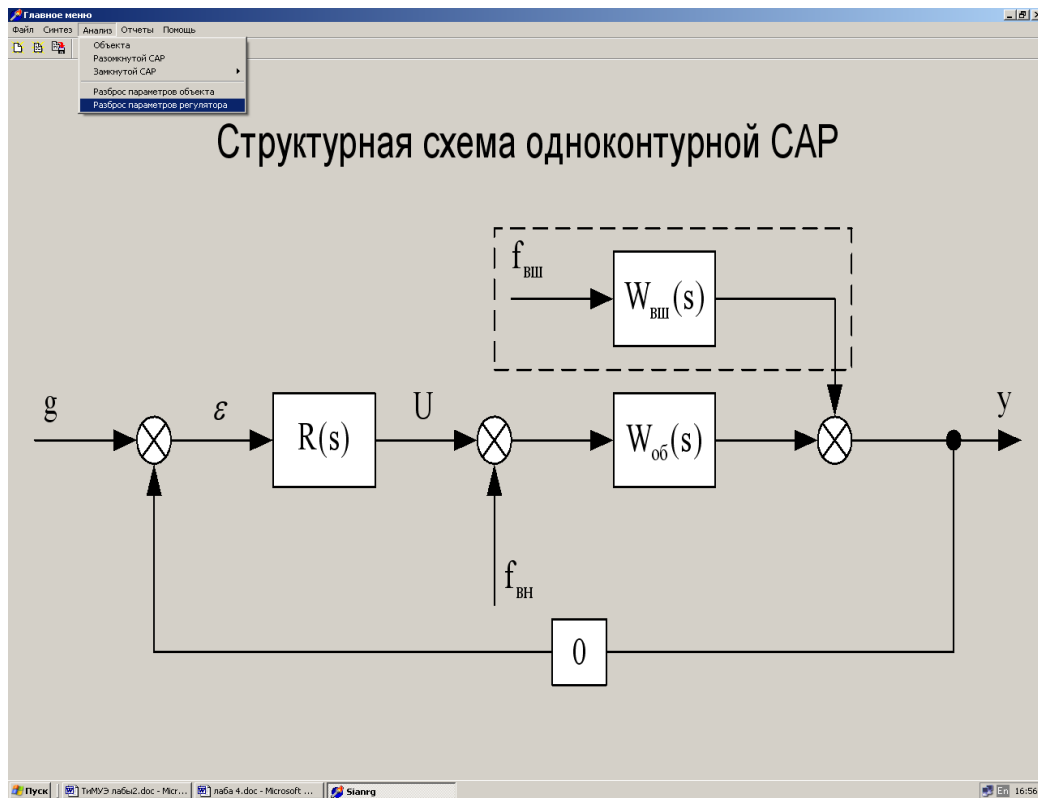


Рис. 2.21. Меню *Анализ/Разброс параметров регулятора*

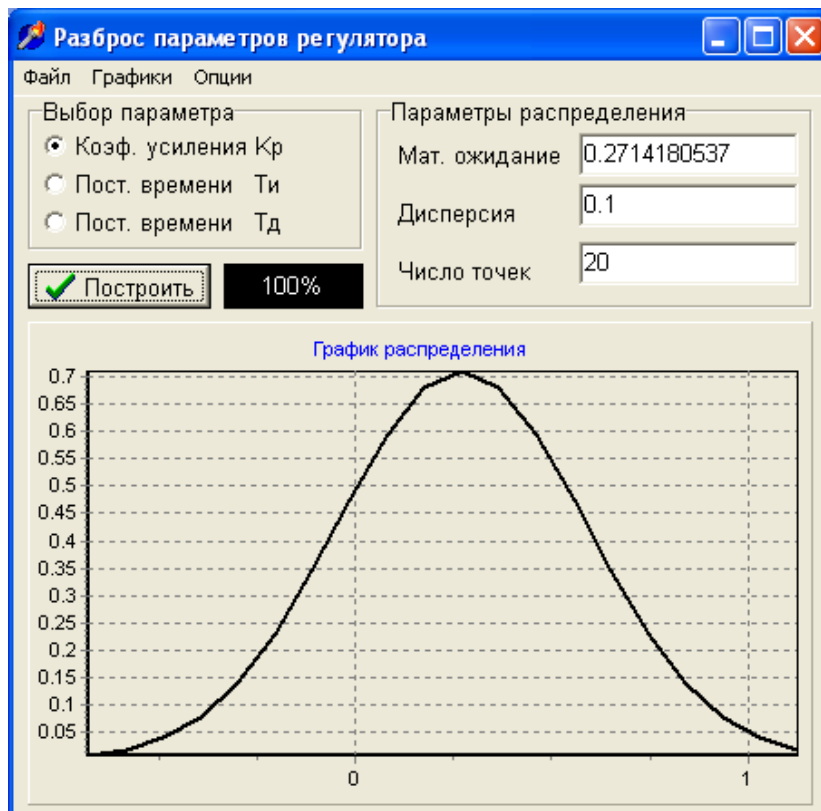


Рис. 2.22. Задание параметров для анализа по разбросу параметров регулятора

Затем зайдите в меню *Графики/Распределение* (рис. 2.23) и постройте распределение исследуемой величины, выбрав параметр распределения регулятора (коэффициент усиления  $k_p$ , постоянную интегрирования  $T_d$ , постоянную дифференцирования  $T_d$ ), тип анализа САР (по управлению или возмущению) и тип графика – характеристику переходного процесса как показателя качества устойчивой САР (время регулирования  $t_p$ , максимальные динамические отклонения  $\sigma$ , перерегулирование  $\eta$ ).



Рис. 2.23. Построение распределения исследуемой величины

Обязательно сразу сохраните график, используя в данном меню *Файл/Сохранить график* в формате \*.grs, это позволит в дальнейшем правильно оформить отчет с наложением графиков эксперимента. Не забывайте подписывать график. Запомните характеристики распределения исследуемой величины (математическое ожидание и дисперсию).

Таким образом, анализируя чувствительность и качество функционирования устойчивой САР, в данной лабораторной работе, изменяя вероятностные

настройки регулятора (математическое ожидание), получим вероятностные характеристики переходного процесса как показатели качества устойчивой САР (время регулирования  $t_p$ , максимальное динамическое отклонение  $\sigma$ , перерегулирование  $\eta$ ).

Для системы с ПИД-регулятором при проведении однофакторного эксперимента:

1) сначала задайте оптимальные значения математического ожидания параметров регулятора (базовая точка эксперимента);

2) затем изменяйте математическое ожидание коэффициента передачи регулятора  $\mu_{k_p} = k_p^o \pm \Delta k_p$  при постоянных значениях математических ожиданий

$$\mu_{T_{II}} = T_{II}^o \text{ и } \mu_{T_D} = T_D^o;$$

3) далее изменяйте математическое ожидание постоянной интегрирования

$$\mu_{T_{II}} = T_{II}^o \pm \Delta T_{II} \text{ при постоянных значениях математических ожиданий}$$

$$\mu_{k_p} = k_p^o \text{ и } \mu_{T_D} = T_D^o;$$

4) и наконец, изменяйте математическое ожидание постоянной дифференцирования

$$\mu_{T_D} = T_D^o \pm \Delta T_D \text{ при постоянных значениях математических ожиданий}$$

$$\mu_{k_p} = k_p^o \text{ и } \mu_{T_{II}} = T_{II}^o.$$

При этом дисперсия настроек регулятора остается одинаковой и неизменной для всех параметров.

Каждый раз, анализируя результаты эксперимента, выявляйте закономерности влияния варьируемых параметров регулятора на показатели качества системы.

После проведения однофакторного эксперимента, например, при изменении математического ожидания коэффициента усиления  $\mu_{k_p}$  (при этом постоянная интегрирования  $T_{II}$  и постоянная дифференцирования  $T_D$  остаются постоянными), у вас получатся семейства характеристик:

- по три графика распределения времени регулирования  $t_p$  для устойчивой САР по управлению при математических ожиданиях, равных  $k_p^o$ ,  $k_p^o + \Delta k_p$ ,  $k_p^o - \Delta k_p$ ;
- по три графика распределения максимального динамического отклонения  $\sigma$  для устойчивой САР по управлению при математических ожиданиях, равных  $k_p^o$ ,  $k_p^o + \Delta k_p$ ,  $k_p^o - \Delta k_p$ ;
- по три графика распределения перерегулирования  $\eta$  для устойчивой САР по управлению при математических ожиданиях, равных  $k_p^o$ ,  $k_p^o + \Delta k_p$ ,  $k_p^o - \Delta k_p$ ;
- по три графика распределения времени регулирования  $t_p$  для устойчивой САР по возмущению при математических ожиданиях, равных  $k_p^o$ ,  $k_p^o + \Delta k_p$ ,  $k_p^o - \Delta k_p$ ;
- по три графика распределения максимального динамического отклонения  $\sigma$  для устойчивой САР по возмущению при математических ожиданиях, равных  $k_p^o$ ,  $k_p^o + \Delta k_p$ ,  $k_p^o - \Delta k_p$ ;
- по три графика распределения перерегулирования  $\eta$  для устойчивой САР по возмущению при математических ожиданиях, равных  $k_p^o$ ,  $k_p^o + \Delta k_p$ ,  $k_p^o - \Delta k_p$ .

Аналогично получатся семейства графиков при проведении п. 3 и п. 4 однофакторного эксперимента.

Для представления результатов однофакторного эксперимента в виде семейства характеристик воспользуйтесь меню *Отчет / Наложение графиков* (рис. 2.24). Сначала выберите тип графика *Разброс* (в формате \*.grs), затем, нажимая кнопку *Добавить*, вставьте соответствующий график. Если тип графика не соответствует, то график не будет вставлен. Обязательно сразу сохраните каждое семейство графиков в формате, например, \*.bmp.

Для отчета по лабораторной работе подписывайте графики со значениями математического ожидания и дисперсии характеристики, указывайте названия и значения осей.

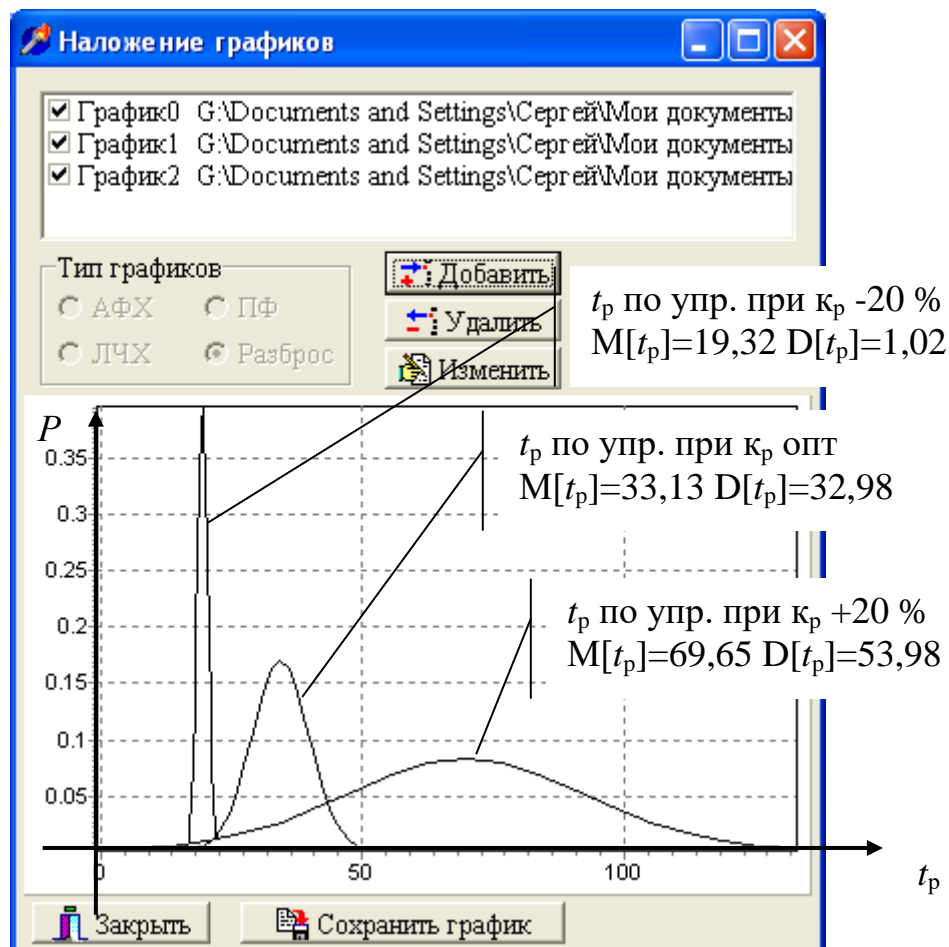


Рис. 2.24. Семейства характеристик распределения времени регулирования  $t_p$  для устойчивой САР по управлению при математических ожиданиях, равных  $k_p^o$ ,  $k_p^o + \Delta k_p$ ,  $k_p^o - \Delta k_p$

## 2.6. Задания для лабораторной работы № 4

Цель лабораторной работы № 4 – провести стохастическое моделирование САР, т. е. провести синтез, получив оптимальные настройки регуляторов, а также провести анализ вероятностных характеристик показателей качества к случайным вариациям настроек (математического ожидания) регулятора.

1. Запустить программу *C:\Users student\TuMVЭ\Sianrg.exe*, которая используется для моделирования САР.

2. Составить параметрическую модель САР, для чего следует найти базовые (оптимальные) настройки для ПИД-регулятора  $k_p^o$ ,  $T_{\text{и}}^o$  и  $T_{\text{д}}^o$  методом Циглера-Никольса. Данные по передаточной функции (1.8) объекта управления  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$  взять из табл. 1.1. Номер варианта уточнить у преподавателя.

3. Провести анализ показателей качества САР при разбросе настроек регулятора системы. Зафиксировать графики распределений, математическое ожидание и дисперсию показателей качества для устойчивой САР по управлению и возмущению: время регулирования  $t_p$ , максимальное динамическое отклонение  $\sigma$ , перерегулирование  $\eta$ . Далее эти параметры называются базовыми показателями качества СУ.

4. В целях определения чувствительности системы к стохастическим вариациям параметров регулятора провести однофакторный эксперимент. В качестве факторов эксперимента выбрать настройки регулятора  $k_p$ ,  $T_{\text{и}}$  и  $T_{\text{д}}$ .

При статистическом задании параметров необходимо изменять вероятностные настройки (математическое ожидание) ПИД-регулятора. Дисперсию принять по умолчанию равной 0,1.

Сначала задайте коэффициент передачи регулятора с математическим ожиданием  $\mu_{k_p} = k_p^o \pm \Delta k_p$  при постоянных значениях параметров с математическим ожиданием  $\mu_{T_{\text{и}}} = T_{\text{и}}^o$  и  $\mu_{T_{\text{д}}} = T_{\text{д}}^o$ . Затем задайте постоянную интегрирования с математическим ожиданием  $\mu_{T_{\text{и}}} = T_{\text{и}}^o \pm \Delta T_{\text{и}}$  при постоянных значениях  $\mu_{k_p} = k_p^o$  и  $\mu_{T_{\text{д}}} = T_{\text{д}}^o$ . Наконец, измените постоянную дифференцирования с математическим ожиданием  $\mu_{T_{\text{д}}} = T_{\text{д}}^o \pm \Delta T_{\text{д}}$  при постоянных значениях параметров с математическим ожиданием  $\mu_{k_p} = k_p^o$  и  $\mu_{T_{\text{и}}} = T_{\text{и}}^o$ .

Уровень вариации параметров регулятора  $\Delta$  может быть равен  $\pm 10$ ,  $\pm 20$ ,  $\pm 30$  % (уточнить у преподавателя).

Результаты однофакторного эксперимента для устойчивой САР по управлению и возмущению представить в виде семейства характеристик показателей

качества (время регулирования  $t_p$ , максимальное динамическое отклонение  $\sigma$ , перерегулирование  $\eta$ ). Семейства характеристик изобразить по трем графикам распределения при математических ожиданиях, равных

$$k_p^o, k_p^o + \Delta k_p, k_p^o - \Delta k_p;$$

$$T_{\text{и}}^o, T_{\text{и}}^o + \Delta T_{\text{и}}, T_{\text{и}}^o - \Delta T_{\text{и}};$$

$$T_{\text{д}}^o, T_{\text{д}}^o + \Delta T_{\text{д}}, T_{\text{д}}^o - \Delta T_{\text{д}}.$$

Обязательно зафиксировать математическое ожидание и дисперсию показателей качества.

5. Результаты синтеза и анализа САР представить нижеследующим образом.

5.1. Исходные данные ОУ, базовые (оптимальные) настройки для ПИД-регулятора  $k_p^o$ ,  $T_{\text{и}}^o$  и  $T_{\text{д}}^o$ , а также базовые показатели качества САР, полученные при разбросе параметров (настроек регулятора) системы: графики распределений показателей качества для устойчивой САР по управлению и возмущению: время регулирования  $t_p$ , максимальное динамическое отклонение  $\sigma$ , перерегулирование  $\eta$ , с указанием на графиках математических ожиданий и дисперсий этих показателей.

5.2. Результаты однофакторного эксперимента по управлению и возмущению представить в виде семейства трех графиков распределения показателей качества при изменении математических ожиданий параметров регулятора

$$k_p^o, k_p^o + \Delta k_p, k_p^o - \Delta k_p;$$

$$T_{\text{и}}^o, T_{\text{и}}^o + \Delta T_{\text{и}}, T_{\text{и}}^o - \Delta T_{\text{и}};$$

$$T_{\text{д}}^o, T_{\text{д}}^o + \Delta T_{\text{д}}, T_{\text{д}}^o - \Delta T_{\text{д}}.$$

Обязательно зафиксировать математическое ожидание и дисперсию показателей качества.

5.3. Выявить закономерность влияния варьируемых параметров регулятора на показатели качества системы и написать выводы.



## 2.7. Описание работы программного модуля SIANRG при статистическом анализе разброса настроек (дисперсии) регулятора САР с ПИД-регулятором

Данный параграф (лабораторная работа № 5) посвящен статистическому анализу разброса параметров регулятора САР с ПИД-регулятором (см. рис. 2.21). Необходимо провести анализ вероятностных характеристик показателей качества к случайным вариациям настроек (дисперсий) регулятора.

Выбрав меню *Анализ/Разброс параметров регулятора* (см. рис. 2.21), выберите один из параметров регуляторов (коэффициент усиления  $k_p$ , постоянную интегрирования  $T_d$  или постоянную дифференцирования  $T_d$ ), задайте параметры распределения для выбранной случайной величины (математическое ожидание, дисперсию, число точек расчета) и нажмите кнопку *Построить*. На экране появится график нормального распределения выбранного параметра регулятора (см. рис. 2.22). Можно сохранить график, используя в данном меню *Файл/Сохранить график*.

Затем зайдите в меню *Графики/Распределение* (см. рис. 2.23) и постройте распределение исследуемой величины, выбрав параметр распределения регулятора (коэффициент усиления  $k_p$ , постоянную интегрирования  $T_d$ , постоянную дифференцирования  $T_d$ ), тип анализа САР (по управлению или возмущению) и тип графика – характеристику переходного процесса как показателя качества устойчивой САР (время регулирования  $t_p$ , максимальные динамические отклонения  $\sigma$ , перерегулирование  $\eta$ ).

Обязательно сразу сохраните график, используя в данном меню *Файл/Сохранить график* в формате \*.grs, это позволит в дальнейшем правильно оформить отчет с наложением графиков эксперимента. Не забывайте подписывать график. Запомните характеристики распределения исследуемой величины (математическое ожидание и дисперсию).

Таким образом, анализируя чувствительность и качество функционирования устойчивой САР, в данной лабораторной работе, изменяя вероятностные

настройки регулятора (дисперсию), получим вероятностные характеристики переходного процесса как показатели качества устойчивой САР (время регулирования  $t_p$ , максимальное динамическое отклонение  $\sigma$ , перерегулирование  $\eta$ ).

Для системы с ПИД-регулятором при проведении однофакторного эксперимента:

- 1) математическое ожидание примите по умолчанию равным оптимальной настройке, задайте дисперсию коэффициента передачи регулятора равной 0,1 (базовая точка эксперимента);
- 2) затем задайте дисперсию коэффициента передачи регулятора  $\sigma_{k_p}^2 = 0,1 \pm \Delta$  при постоянных значениях дисперсий (заданных по умолчанию) других параметров  $\sigma_{T_{II}}^2 = 0,1$  и  $\sigma_{T_d}^2 = 0,1$ ;
- 3) задайте дисперсию постоянной интегрирования  $\sigma_{T_{II}}^2 = 0,1 \pm \Delta$  при постоянных значениях дисперсий (заданных по умолчанию) других параметров  $\sigma_{k_p}^2 = 0,1$  и  $\sigma_{T_d}^2 = 0,1$ ;
- 4) и наконец, изменяйте дисперсию постоянной дифференцирования  $\sigma_{T_d}^2 = 0,1 \pm \Delta$  при постоянных значениях дисперсий (заданных по умолчанию) других параметров  $\sigma_{k_p}^2 = 0,1$  и  $\sigma_{T_{II}}^2 = 0,1$ .

Каждый раз, анализируя результаты эксперимента, выявляйте закономерности влияния варьируемых параметров регулятора на показатели качества системы.

После проведения однофакторного эксперимента, например при изменении дисперсии коэффициента усиления  $\sigma_{k_p}^2$  (при этом постоянная интегрирования  $T_d$  и постоянная дифференцирования  $T_d$  остаются постоянными) у вас получатся семейства характеристик:

- по три графика распределения времени регулирования  $t_p$  для устойчивой САР по управлению при дисперсиях, равных  $\sigma_{k_p}^2 = 0,1$ ,  $\sigma_{k_p}^2 = 0,1 \pm \Delta$ ;

- по три графика распределения максимального динамического отклонения  $\sigma$  для устойчивой САР по управлению при дисперсиях, равных  $\sigma_{k_p}^2 = 0,1$ ,  $\sigma_{k_p}^2 = 0,1 \pm \Delta$ ;
- по три графика распределения перерегулирования  $\eta$  для устойчивой САР по управлению при дисперсиях, равных  $\sigma_{k_p}^2 = 0,1$ ,  $\sigma_{k_p}^2 = 0,1 \pm \Delta$ ;
- по три графика распределения времени регулирования  $t_p$  для устойчивой САР по возмущению при дисперсиях, равных  $\sigma_{k_p}^2 = 0,1$ ,  $\sigma_{k_p}^2 = 0,1 \pm \Delta$ ;
- по три графика распределения максимального динамического отклонения  $\sigma$  для устойчивой САР по возмущению при дисперсиях, равных  $\sigma_{k_p}^2 = 0,1$ ,  $\sigma_{k_p}^2 = 0,1 \pm \Delta$ ;
- по три графика распределения перерегулирование  $\eta$  для устойчивой САР по возмущению при дисперсиях, равных  $\sigma_{k_p}^2 = 0,1$ ,  $\sigma_{k_p}^2 = 0,1 \pm \Delta$ .

Аналогично получатся семейства графиков при проведении п. 3 и п. 4 однофакторного эксперимента.

Для представления результатов однофакторного эксперимента в виде семейства характеристик воспользуйтесь меню *Отчет / Наложение графиков* (см. рис. 2.24). Сначала выберите тип графика *Разброс* (в формате \*.grs), затем, нажимая кнопку *Добавить*, вставьте соответствующий график. Если тип графика не соответствует, то график не будет вставлен. Обязательно сразу сохраните каждое семейство графиков в формате, например, \*.bmp.

Для отчета по лабораторной работе подписывайте графики со значениями математического ожидания и дисперсии характеристики, указывайте названия и значения осей.

## 2.8. Задания для лабораторной работы № 5

*Цель лабораторной работы № 5* – провести стохастическое моделирование САР, т. е. провести синтез, получив оптимальные настройки регуляторов, а

также провести анализ вероятностных характеристик показателей качества к случайным вариациям настроек (дисперсии) регулятора.

1. Запустить программу *C:\Users student\TuМУЭ\Sianrg.exe*, которая используется для моделирования САР.

2. Составить параметрическую модель САР, для чего следует найти базовые (оптимальные) настройки для ПИД-регулятора  $k_p^o$ ,  $T_{\text{и}}^o$  и  $T_{\text{д}}^o$  методом Циглера-Никольса. Данные по передаточной функции (1.8) объекта управления  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$  взять из табл. 1.1. Номер варианта уточнить у преподавателя.

3. Провести анализ показателей качества САР при разбросе настроек регулятора системы. Зафиксировать графики распределений, математическое ожидание и дисперсию показателей качества для устойчивой САР по управлению и возмущению: время регулирования  $t_p$ , максимальное динамическое отклонение  $\sigma$ , перерегулирование  $\eta$ . Далее эти параметры называются базовыми показателями качества СУ.

4. В целях определения чувствительности системы к стохастическим вариациям параметров регулятора провести однофакторный эксперимент. В качестве факторов эксперимента выбрать настройки регулятора  $k_p$ ,  $T_{\text{и}}$  и  $T_{\text{д}}$ .

При статистическом задании параметров необходимо изменять вероятностные настройки (дисперсию) ПИД-регулятора. Математическое ожидание принять по умолчанию равным оптимальной настройке.

Для этого необходимо сначала задать дисперсию коэффициента передачи регулятора  $\sigma_{k_p}^2 = 0,1 \pm \Delta$  при постоянных значениях дисперсий (заданных по умолчанию) других параметров  $\sigma_{T_{\text{и}}}^2 = 0,1$  и  $\sigma_{T_{\text{д}}}^2 = 0,1$ . Затем следует задать дисперсию постоянной интегрирования  $\sigma_{T_{\text{и}}}^2 = 0,1 \pm \Delta$  при постоянных значениях дисперсий (заданных по умолчанию) других параметров  $\sigma_{k_p}^2 = 0,1$  и  $\sigma_{T_{\text{д}}}^2 = 0,1$ . Наконец, необходимо изменить дисперсию постоянной дифференци-

рования  $\sigma_{T_d}^2 = 0,1 \pm \Delta$  при постоянных значениях дисперсий (заданных по умолчанию) других параметров  $\sigma_{k_p}^2 = 0,1$  и  $\sigma_{T_{II}}^2 = 0,1$ .

Уровень вариации параметров регулятора  $\Delta$  может быть равен  $\pm 20$ ,  $\pm 50$ ,  $\pm 90$  % (уточнить у преподавателя).

Результаты однофакторного эксперимента для устойчивой САР по управлению и возмущению представить в виде семейства характеристик показателей качества: время регулирования  $t_p$ , максимальное динамическое отклонение  $\sigma$ , перерегулирование  $\eta$ . Семейства характеристик изобразить по трем графикам распределения при дисперсиях параметров регулятора, равных

$$\sigma_{k_p}^2 = 0,1, \sigma_{k_p}^2 = 0,1 + \Delta, \sigma_{k_p}^2 = 0,1 - \Delta;$$

$$\sigma_{T_{II}}^2 = 0,1, \sigma_{T_{II}}^2 = 0,1 + \Delta, \sigma_{T_{II}}^2 = 0,1 - \Delta;$$

$$\sigma_{T_d}^2 = 0,1, \sigma_{T_d}^2 = 0,1 + \Delta, \sigma_{T_d}^2 = 0,1 - \Delta.$$

Обязательно зафиксировать математическое ожидание и дисперсию показателей качества.

5. Результаты синтеза и анализа САР представить нижеследующим образом.

5.1. Исходные данные ОУ, базовые (оптимальные) настройки для ПИД-регулятора  $k_p^o$ ,  $T_{II}^o$  и  $T_d^o$ , а также базовые показатели качества САР, полученные при разбросе настроек регулятора системы: графики распределений показателей качества для устойчивой САР по управлению и возмущению: время регулирования  $t_p$ , максимальное динамическое отклонение  $\sigma$ , перерегулирование  $\eta$ , с указанием на графиках математических ожиданий и дисперсий показателей качества.

5.2. Результаты однофакторного эксперимента по управлению и возмущению представить в виде семейства трех графиков распределения показателей качества при изменении дисперсий параметров регулятора

$$\sigma_{k_p}^2 = 0,1, \sigma_{k_p}^2 = 0,1 + \Delta, \sigma_{k_p}^2 = 0,1 - \Delta;$$

$$\sigma_{T_{II}}^2 = 0,1, \sigma_{T_{II}}^2 = 0,1 + \Delta, \sigma_{T_{II}}^2 = 0,1 - \Delta;$$

$$\sigma_{T_{Д}}^2 = 0,1, \sigma_{T_{Д}}^2 = 0,1 + \Delta, \sigma_{T_{Д}}^2 = 0,1 - \Delta.$$

Обязательно зафиксировать математическое ожидание и дисперсию показателей качества.

5.3. Выявить закономерность влияния варьируемых параметров регулятора на показатели качества системы и написать выводы.

### **3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ, РЕГРЕССИОННЫЙ И ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ**

#### **3.1. Особенности обработки и анализа результатов вычислительного моделирования**

##### *3.1.1. Оценка характеристик стохастической модели*

Успех имитационного эксперимента с моделью системы существенным образом зависит от правильного решения вопросов обработки и последующего анализа и интерпретации результатов моделирования.

В качестве оценок для искомых характеристик при проведении имитационного эксперимента со стохастической моделью рассчитывают средние значения математического ожидания, дисперсии, корреляционные моменты и т. д. При обработке результатов вычислительного эксперимента с моделью наиболее часто возникают следующие задачи: определение эмпирического закона распределения случайной величины, проверка однородности распределений, сравнение средних значений и дисперсий переменных, полученных в результате моделирования, и т. д. Эти задачи с точки зрения математической статистики являются типовыми задачами по проверке статистических гипотез.

Задача определения эмпирического закона распределения случайной величины – наиболее общая из перечисленных, но для правильного решения требует большого числа реализации  $N$ . В этом случае по результатам вычислительного эксперимента находят значения выборочного закона распределения  $F_n(y)$  (или функции плотности  $f_n(y)$ ) и выдвигают нулевую гипотезу  $H_0$  о том, что по-

лученное эмпирическое распределение согласуется с каким-либо теоретическим распределением. Проверяют эту гипотезу  $H_0$  с помощью статистических критериев согласия Колмогорова, Пирсона, Смирнова, Фишера и т. д., причем необходимую в этом случае статистическую обработку результатов ведут по возможности в процессе моделирования системы на компьютере.

Для принятия или опровержения гипотезы выбирают некоторую случайную величину  $U$ , характеризующую степень расхождения теоретического и эмпирического распределения, связанную с недостаточностью статистического материала и другими случайными причинами. Закон распределения этой случайной величины зависит от закона распределения случайной величины  $\eta$  и числа реализации  $N$  при статистическом моделировании системы. Если вероятность расхождения теоретического и эмпирического распределения  $P\{U_i \geq U\}$  велика в понятиях применяемого критерия согласия, проверяемая гипотеза о виде распределения  $H_0$  не опровергается. Выбор вида теоретического распределения  $F(y)$  (или  $f(y)$ ) проводится по графикам (гистограммам)  $F_3(y)$  (или  $f_3(y)$ ), выведенным на печать или на экран дисплея.

Хотя рассмотренные оценки искомых характеристик процесса функционирования системы, полученные в результате вычислительного эксперимента с моделью, являются простейшими, но они охватывают большинство случаев, встречающихся в практике обработки результатов моделирования системы для целей ее исследования и проектирования.

### *3.1.2. Виды анализа результатов вычислительного моделирования*

Существуют различные методы анализа, зависящие от целей исследования и вида получаемых при моделировании характеристик. Рассмотрим особенности использования методов корреляционного, регрессионного и дисперсионного анализа для результатов моделирования систем.

С помощью *корреляционного анализа* можно установить, насколько тесна связь между двумя (или более) случайными величинами, наблюдаемыми и фиксируемыми при моделировании конкретной системы. Корреляционный анализ

результатов моделирования сводится к оценке разброса значений  $\eta$  относительно среднего значения  $\bar{y}$ , т. е. к оценке силы корреляционной связи. Существование этих связей и их тесноту можно для схемы корреляционного анализа  $y = M[\eta/\xi = x]$  выразить при наличии линейной связи между исследуемыми величинами и нормальности их совместного распределения с помощью коэффициента корреляции

$$r_{\xi\eta} = \frac{M[\xi - M[\xi]]M[\eta - M[\eta]]}{\sqrt{D[\xi]D[\eta]}} = \frac{M[\xi - \mu_\xi]M[\eta - \mu_\eta]}{\sigma_\xi \sigma_\eta}, \quad (3.1)$$

т. е. второй смешанный центральный момент делится на произведение средних квадратичных отклонений, чтобы иметь безразмерную величину, инвариантную относительно единиц измерения рассматриваемых случайных переменных.

Связь между величиной коэффициента корреляции и оценкой тесноты связи по шкале Чеддока: 0,10–0,29 – слабая характеристика силы связи; 0,30–0,49 – умеренная; 0,50–0,69 – заметная; 0,70–0,89 – высокая; 0,90–1,00 – весьма высокая.

Коэффициент корреляции при  $N$  реализациях:

$$\tilde{r}_{\xi\eta} = \frac{\sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\left[ \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2 \sum_{k=1}^N (y_k - \bar{y})^2 \right]^{1/2}} = \frac{\sum_{k=1}^N x_k y_k - N\bar{x} \cdot \bar{y}}{\left[ \left( \sum_{k=1}^N x_k^2 - N\bar{x}^2 \right) \left( \sum_{k=1}^N y_k^2 - N\bar{y}^2 \right) \right]^{1/2}}. \quad (3.2)$$

Данное соотношение требует минимальных затрат машинной памяти на обработку результатов моделирования. Получаемый при этом коэффициент корреляции  $|r_{\xi\eta}| \leq 1$ . При сделанных предположениях  $r_{\xi\eta} = 0$  свидетельствует о взаимной независимости случайных переменных  $\xi$  и  $\eta$ , исследуемых при моделировании (рис. 3.1, а). При  $r_{\xi\eta} = 1$  имеет место функциональная (т. е. нестохастическая) линейная зависимость вида  $y = b_0 + b_1x$ , причем если  $r_{\xi\eta} > 0$ , то говорят о положительной корреляции, т. е. большие значения одной случайной величины соответствуют большим значениям другой (рис. 3.1, б). Случай  $0 < r_{\xi\eta} < 1$  соответствует наличию линейной корреляции с рассеянием



(рис. 3.1, в) либо наличие нелинейной корреляции результатов моделирования (рис. 3.1, г).

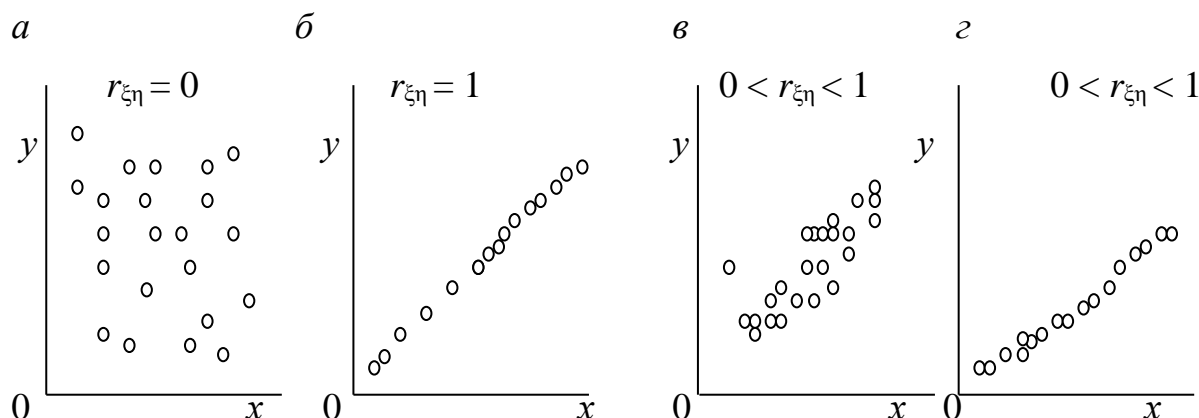


Рис. 3.1. Различные случаи корреляции переменных

Для того чтобы оценить точность полученной при обработке результатов моделирования системы оценки  $r_{\xi\eta}$ , целесообразно ввести в рассмотрение ко-

эффициент  $w = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r_{\xi\eta}}{1-r_{\xi\eta}}$ , причем  $w$  приближенно подчиняется гауссовскому

распределению со средним значением и дисперсией:

$$\mu_w = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r_{\xi\eta}}{1-r_{\xi\eta}}, \quad \sigma_w^2 = \frac{1}{N-3}. \quad (3.3)$$

При анализе результатов моделирования системы важно отметить то обстоятельство, что если даже удалось установить тесную зависимость между двумя переменными, то отсюда еще не следует их причинно-следственная взаимобусловленность. Возможна ситуация, когда случайные  $\xi$  и  $\eta$  стохастически зависимы, хотя причинно они являются для системы независимыми. При статистическом моделировании наличие такой зависимости может иметь место, например, из-за коррелированности последовательностей псевдослучайных чисел, используемых для имитации событий, положенных в основу вычисления значений  $x$  и  $y$ .

Таким образом, корреляционный анализ устанавливает связь между исследуемыми случайными переменными машинной модели и оценивает тесноту

этой связи. Однако в дополнение к этому желательно располагать моделью зависимости, полученной после обработки результатов моделирования.

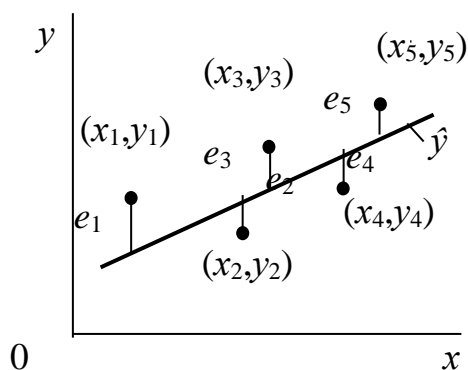
*Регрессионный анализ* дает возможность построить модель, наилучшим образом соответствующую набору данных, полученных в ходе вычислительного эксперимента с системой. Под наилучшим соответствием понимается минимизированная функция ошибки, являющаяся разностью между прогнозируемой моделью и данными эксперимента. Такой функцией ошибки при регрессионном анализе служит сумма квадратов ошибок.

Рассмотрим особенности регрессионного анализа результатов моделирования при построении линейной регрессионной модели. На рис. 3.2, *а* показаны точки  $x_i, y_i, i = \overline{1, N}$ , полученные в вычислительном эксперименте с моделью системы. Делаем предположение, что модель результатов вычислительного эксперимента графически может быть представлена в виде прямой линии

$$\hat{y} = \varphi(x) = b_0 + b_1x, \quad (3.4)$$

где  $\hat{y}$  – величина, предсказываемая регрессионной моделью.

*а*



*б*

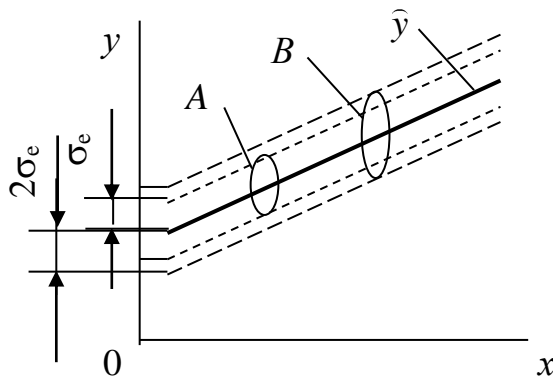


Рис. 3.2. Построение линейной регрессионной модели

Требуется получить такие значения коэффициентов  $b_0$  и  $b_1$ , при которых сумма квадратов ошибок модели является минимальной. На рисунке ошибка  $e_i, i = \overline{1, N}$ , для каждой экспериментальной точки определяется как расстояние по вертикали от этой точки до линии регрессии  $\hat{y} = \varphi(x)$ .

Обозначим  $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Тогда выражение для ошибок будет иметь вид

$$e_i = \hat{y}_i - y_i = b_0 + b_1 x_i - y_i, \text{ а функция ошибки } F_0 = \sum_{i=1}^N (b_0 + b_1 x_i - y_i)^2.$$

Для получения  $b_0$  и  $b_1$ , при которых функция  $F_0$  является минимальной, применяются обычные методы математического анализа. Условием минимума является  $\partial F_0 / \partial b_0 = 0$ ,  $\partial F_0 / \partial b_1 = 0$ .

Дифференцируя  $F_0$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial b_0} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^N (b_0 + b_1 x_i - y_i)^2}{\partial b_0} = 2(Nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N y_i) = 0; \\ \frac{\partial F_0}{\partial b_1} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^N (b_0 + b_1 x_i - y_i)^2}{\partial b_1} = 2(b_0 \sum_{i=1}^N x_i + b_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i y_i) = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решая систему этих двух линейных алгебраических уравнений, можно получить значения  $b_0$  и  $b_1$ . В матричном представлении эти уравнения имеют вид

$$\begin{pmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N x_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N y_i \\ \sum_{i=1}^N x_i y_i \end{pmatrix}.$$

Решая это уравнение, получаем

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2}; \quad (3.6)$$

$$b_1 = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2}, \quad (3.7)$$

где  $N$  – число реализаций при моделировании системы.

Соотношения для вычисления  $b_0$  и  $b_1$  требуют минимального объема памяти компьютера для обработки результатов моделирования. Обычно мерой ошибки регрессионной модели служит среднее квадратичное отклонение

$$\sigma_e = \left[ \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N e_i^2 \right]^{1/2} = \left[ \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (b_0 + b_1 x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.8)$$

Для нормально распределенных процессов приблизительно 67 % точек находится в пределах одного отклонения  $\sigma_e$  от линии регрессии и 95 % – в пределах  $2\sigma_e$  (трубки *A* и *B* соответственно на рис. 3.2, б). Для проверки точности оценок  $b_0$  и  $b_1$  в регрессионной модели могут быть использованы, например, критерии Фишера ( $F$ -распределение) и Стьюдента ( $t$ -распределение). Аналогично могут быть оценены коэффициенты уравнения регрессии и для случая нелинейной аппроксимации.

*Дисперсионный анализ* является одним из наиболее распространенных методов, используемых для сравнения большого числа наборов случайных величин. Он широко применяется в планировании экспериментов, для проверки гипотез о наличии связи между откликом (реакцией) системы и исследуемыми факторами, а также для установления силы влияния факторов и их взаимодействий. Основная идея метода заключается в изучении источников изменчивости зависимой переменной (отклика) и разложении общей дисперсии наблюдаемых значений отклика на составляющие – дисперсию, обусловленную влиянием изучаемых факторов, и остаточную дисперсию, являющуюся следствием действия случайных причин и неучтенных факторов. Сравнивая дисперсию факторов с остаточной дисперсией, можно проверить гипотезу о влиянии факторов на величину изменчивости отклика [5].

Рассмотрим только один фактор с несколькими уровнями. Результаты экспериментов или наблюдений обычно представляются, как в табл. 3.1.

По результатам применения каждого уровня действующего фактора вычисляются средние значения  $\bar{x}_j$ . Однако сравниваются между собой не полу-

ченные средние, а так называемые эффекты  $\alpha_j = \bar{x}_j - \bar{x}$ , где  $\bar{x}$  – среднее всех наблюдений.

Таблица 3.1

Номер опыта	Уровень фактора				
	1	...	$j$	...	$k$
1	$x_{11}$		$x_{1j}$		$x_{1k}$
...					
$i$	$x_{i1}$		$x_{ij}$		$x_{ik}$
...					
$n$	$x_{n1}$		$x_{nj}$		$x_{nk}$

Тогда результат  $i$ -го опыта при использовании уровня фактора  $j$  можно записать в виде

$$x_{ij} = \bar{x}_j + e_{ij} = \bar{x} + \alpha_j + e_{ij}, \quad (3.9)$$

где  $e_{ij}$  – ошибка результата.

Из этого равенства следует, что

$$x_{ij} - \bar{x} = \alpha_j + e_{ij}. \quad (3.10)$$

Возведя обе части в квадрат, получим

$$(x_{ij} - \bar{x})^2 = \alpha_j^2 + 2\alpha_j e_{ij} + e_{ij}^2. \quad (3.11)$$

Таких равенств для каждого уровня  $j$  всего  $n$ , а всего уровней –  $k$ . Поэтому складывая все равенства такого вида для каждого уровня, получим

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \alpha_j^2 + 2 \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \alpha_j e_{ij} + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n e_{ij}^2. \quad (3.12)$$

С учетом того, что  $\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \alpha_j e_{ij} = \sum_{j=1}^k \left( \alpha_j \sum_{i=1}^n e_{ij} \right) = 0,$

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \alpha_j^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n e_{ij}^2$$

или

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (\bar{x}_j - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2. \quad (3.13)$$

Это тождество и является основным в дисперсионном анализе. Из него следует, что варьирование всех результатов наблюдений или измерений около общего среднего может быть разложено на суммы квадратов, первая из которых характеризует варьирование, обусловленное изменчивостью эффектов различных уровней фактора, а вторая – варьирование под влиянием неучтенных факторов (ошибка эксперимента).

Рассмотрим базовый вариант однофакторного дисперсионного анализа с постоянными эффектами. Нас будет интересовать процесс статистического вывода относительно множества главных эффектов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ .

Пусть имеется бесконечная последовательность повторений эксперимента, в каждом из которых будет  $n$  объектов с  $k$  уровнями. При этом  $k$  совокупностей фиксируется таким образом, чтобы каждая из них обеспечивала получение одной выборки объемом  $n$  при каждом повторении эксперимента.

Таким образом, мы приходим к схеме дисперсионного анализа с постоянными эффектами. Будем также предполагать, что  $n$  наблюдений на каждом уровне независимы и взяты из нормальной генеральной совокупности с дисперсией  $\sigma^2$ . Предполагается, что дисперсия  $\sigma^2$  одинакова на всех  $k$  уровнях, а число наблюдений для них одинаково и равно  $n$ .

Дисперсионный анализ включает в себя следующие этапы:

1. Для объяснения данных постулируется модель  $x_{ij} = \bar{x} + \alpha_j + e_{ij}$ , где все  $e_{ij}$  независимы, а  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 0$ .

2. Формулируется нуль-гипотеза  $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$  против  $H_1$ : по крайней мере, два  $\alpha_i$  различны. Или иначе:  $H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_k$ ,  $H_1: \sum_{j=1}^k (\bar{x}_j - \bar{x})^2 \neq 0$ .

3. Выбирается уровень значимости  $\gamma$ , как правило, 0,01, 0,05 или 0,1.

4. Производятся вычисления сумм квадратов ( $СК$ ), степеней свободы и средних квадратов ( $ССК$ ) по следующим формулам:

между уровнями

$$CK_M = \sum_{j=1}^k n(\bar{x}_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_j \left( \sum_i^n x_{ij} \right)^2 - \frac{1}{kn} \left( \sum_j \sum_i^n x_{ij} \right)^2, \quad (3.14)$$

внутри уровней

$$CK_B = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 = \sum_j \sum_i^n x_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_j \left( \sum_i^n x_{ij} \right)^2, \quad (3.15)$$

при этом число степеней свободы для  $CK_M$  равно  $(k-1)$ , а для  $CK_B - k(n-1)$  и

$$\text{тогда } CCK_M = \frac{CK_M}{(k-1)}, \quad CCK_B = \frac{CK_B}{k(n-1)}.$$

$$\text{Общая выборочная дисперсия всех наблюдений } S_B^2 = \frac{CK_M + CK_B}{(kn-1)}$$

$$S_B^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2 = \frac{1}{kn-1} \left[ \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n x_{ij}^2 - \frac{1}{kn} \left( \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n x_{ij} \right)^2 \right]. \quad (3.16)$$

$CCK_M$  – это оценка факторной дисперсии  $\tilde{D}_x$ .  $CCK_B$  – это оценка генеральной дисперсии  $\tilde{D}_0[y]$ , связанная со случайными факторами, имеющая степень свободы  $k(n-1)$ , ее еще называют остаточной дисперсией.

5. Рассчитывается дисперсионное отношение  $F = CCK_M/CCK_B$  и сравнивается с критическим значением  $F$ -распределения для выбранного уровня значимости. Если при заданном уровне значимости  $\gamma$  выполняется неравенство  $CCK_M/CCK_B < F_{\text{теор}}(n_1, n_2)$ , то нулевую гипотезу  $H_0$  о равенстве средних значений на различных уровнях можно считать справедливой и влиянием фактора на результаты экспериментальных исследований можно пренебречь. В противном случае влияние фактора будет значимым.

Достаточно часто на практике сталкиваются с ситуацией, когда в силу тех или иных причин число наблюдений  $n_j$  для каждого уровня фактора неодинаково. Тогда число степеней свободы для  $CCK_M$  остается прежним и равно  $(k-1)$ , а число степеней свободы для  $CCK_B$  равно  $(N-k)$ , где  $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ . Формулы для сумм квадратов модифицируются:

$$CK_M = \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_j} \left( \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2 - \frac{1}{N} \left( \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2, \quad (3.17)$$

$$CK_B = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_j} \left( \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \right)^2. \quad (3.18)$$

Границу критической области определяют по таблицам  $F$ -распределения при заданных степенях свободы  $n_1 = (k - 1)$  и  $n_2 = k(n - 1)$  и выбранном уровне значимости  $\gamma$ , например равном 0,05. Это число представляет собой граничное значение, слева от которого лежит 95 % от общей площади под кривой  $F$ -распределения. С помощью функции *Microsoft Excel* ФРАСП( $x$ ;  $n_1$ ;  $n_2$ ) можно вычислить вероятность (степень отклонения) одностороннего  $F$ -распределения  $P(x < F_{n_1 n_2})$ . Например, ФРАСП(3,158; 2; 57) = 0,05, ФРАСП(4,998; 2; 57) = 0,01. Используя обратную функцию  $F$ -распределения ФРАСПОБР( $p$ ;  $n_1$ ;  $n_2$ ), можно вычислить теоретическое значение  $F_{\text{теор}}$ , которое необходимо сравнить с расчетным, например, ФРАСПОБР(0,05; 2; 57) = 3,158, ФРАСПОБР(0,01; 2; 57) = 4,998.

Значимость результатов дисперсионного анализа базируются на предположении о нормальности исходных данных и равенстве (однородности) дисперсий. Рассмотрим, как нарушения этих предпосылок сказываются на уровне значимости. Теоретические и экспериментальные исследования показали следующее:

1. Когда объемы выборок равны, влиянием неоднородности дисперсий на уровень значимости  $F$ -критерия можно пренебречь.
2. Когда объемы выборок и их дисперсии не равны, а из совокупностей с большими дисперсиями выбирается меньшее число объектов, вероятность ошибки первого рода больше.
3. При этих же условиях, если из совокупностей с большими дисперсиями берется большее число объектов, то вероятность ошибки первого рода меньше.
4. Влияние нарушения нормальности на номинальный уровень значимости  $F$ -критерия очень незначительно.



Таким образом, процедура дисперсионного анализа достаточно устойчива к нарушению предпосылок, лежащих в ее основе.

Таким образом, дисперсионный анализ позволяет вместо проверки нулевой гипотезы о равенстве средних значений выборок проводить при обработке результатов эксперимента проверку нулевой гипотезы о тождественности выборочной и генеральной дисперсии.

### **3.2. Анализ результатов моделирования систем автоматического регулирования с использованием программного модуля *SIANRG***

Программный модуль *SIANRG* предназначен для моделирования САР при варьировании параметров объекта управления (ОУ) и настроек регуляторов. Анализ САР позволяет определить устойчивость системы по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой САР и качество системы по переходным характеристикам переходного процесса замкнутой САР. При определении чувствительности САР к параметрам ее элементов синтез и анализ повторяются многократно при изменении параметров детерминировано и стохастически.

Под действием на систему случайных факторов эксперимент проводится многократно, а обработка результатов моделирования происходит с использованием регрессионного, корреляционного и дисперсионного анализа (рис. 3.3).

Используя результаты моделирования САР, с помощью программного модуля *SIANRG* можно определить:

- влияние параметров объекта (постоянная времени ОУ  $T_{об}$ , коэффициент усиления ОУ  $k_{об}$  и транспортное запаздывание ОУ  $\tau_{об}$ ) на выходные параметры, показатели качества САР (время регулирования  $t_p$ , перерегулирование  $\eta$  и максимальное динамическое отклонение  $\sigma$ ) и количественное соотношение между случайными величинами изучаемого процесса (регрессионный анализ);
- тесноту связи между качественными показателями САР (время регулирования  $t_p$ , перерегулирование  $\eta$  и максимальное динамическое отклонение  $\sigma$ ), сравниваемыми попарно, и оценку разброса значений этих параметров отно-

сительно среднего значения, т. е. оценку силы корреляционной связи (корреляционный анализ);

- общую выборочную дисперсию  $S_b^2$  и оценку генеральной дисперсии  $D_0[y]$ , связанную со случайными факторами, с помощью которых можно сделать вывод о случайной и неслучайной природе результатов моделирования САР (дисперсионный анализ).

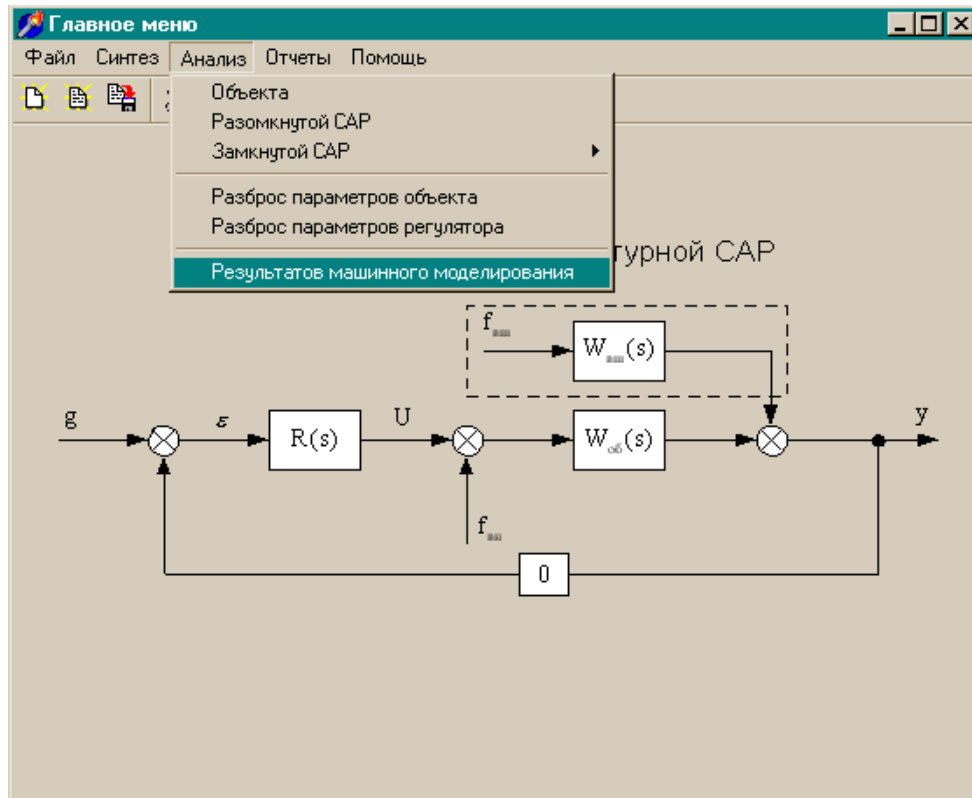


Рис. 3.3. Меню *Анализ* для обработки результатов вычислительного моделирования

Выбрать соответствующий вид анализа можно, используя кнопки с соответствующими надписями (рис. 3.4) или пункт меню *Тип* (рис. 3.5).

Далее необходимо задать данные для обработки результатов.

Для задания данных регрессионного анализа (рис. 3.6) требуется ввести параметры ОУ  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$ , разбросы значений и числа итераций.

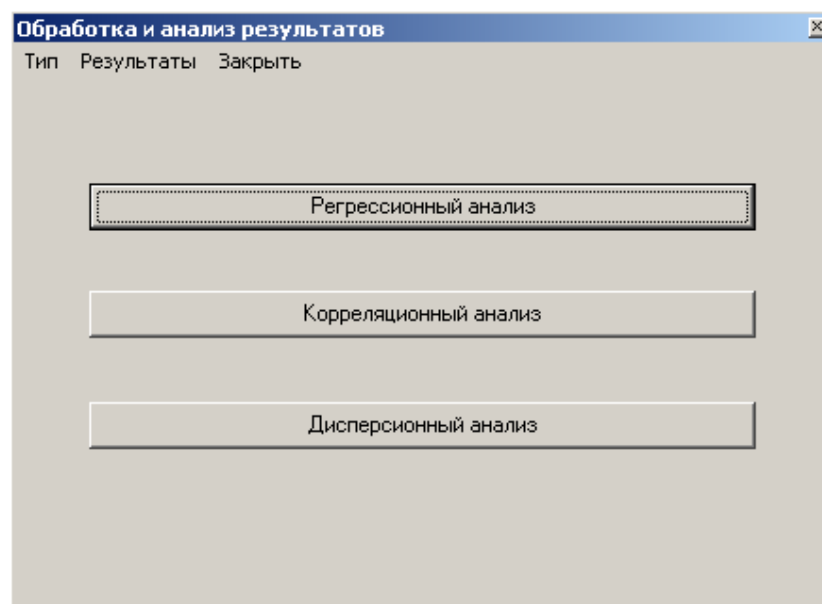


Рис. 3.4. Выбор вида анализа результатов вычислительного моделирования

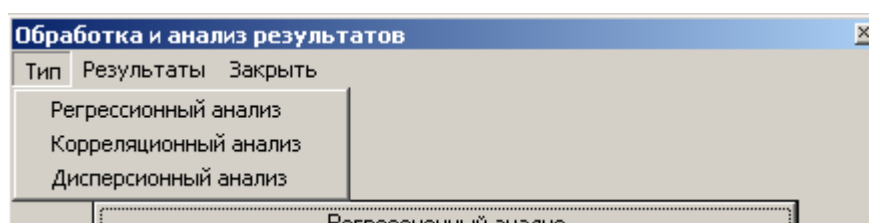


Рис. 3.5. Меню выбора типа анализа

 A screenshot of the software window showing the "Параметры регрессионного анализа" section. The window has the same tabs as before. The main area contains three groups of input fields, each with a label on the left and two fields on the right. 
 

- The first group is labeled "По Коб :". It has a field for "Кoeffициент усиления" with the value "0.05", a "Разброс (+/-)" field with the value "5", and a "число итераций" field with the value "20".
- The second group is labeled "По Тоб :". It has a "Постоянная времени" field with the value "4", a "Разброс (+/-)" field with the value "3", and a "число итераций" field with the value "15".
- The third group is labeled "По Тау об :". It has a "Транспортное запаздывание" field with the value "2", a "Разброс (+/-)" field with the value "8", and a "число итераций" field with the value "50".

 At the bottom of the window, there are two buttons: "Применить" and "Отмена".

Рис. 3.6. Задание данных регрессионного анализа

Для задания данных для корреляционного анализа (рис. 3.7) вводятся значения математического ожидания и дисперсии параметров ОУ  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$ , величины желаемых разбросов и требуемых чисел итераций моделирования.

Ввод начальных данных дисперсионного анализа (рис. 3.8) предполагает задание математического ожидания и дисперсии параметров ОУ  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$ , числа повторных наблюдений  $n$  на  $i$ -м уровне и количества опытов  $k$ .

При загрузке форм передаются последние заданные при синтезе величины параметров ОУ (математические ожидания  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$ ), остальные величины задаются по умолчанию. Для сохранения данных необходимо нажать кнопку *Применить*.

Для получения результатов вычислительного моделирования необходимо в пункте меню *Результаты* выбрать соответствующий вид анализа (рис. 3.9), что приведет к выводу соответствующих форм (рис. 3.10–3.12).

Рис. 3.7. Задание данных корреляционного анализа

Выбор необходимых зависимостей характеристик процесса от параметров ОУ осуществляется с помощью соответствующих кнопок. Графические представления результатов работы могут быть сохранены при помощи кнопки *Сохранить график* в целях упрощения написания отчетов.

**Обработка и анализ результатов** [X]

Тип Результаты Закреть

**Параметры дисперсионного анализа**

По Коб :  
M = 0.05  
D = 0.1

По Тоб :  
M = 4  
D = 0.1

По Тау об :  
M = 2  
D = 0.1

Число повторных наблюдений на i - ом уровне n = 22

Количество опытов k = 100

Применить Отмена

Рис. 3.8. Задание данных дисперсионного анализа

**Обработка и анализ результатов** [X]

Тип Результаты Закреть

Регрессионного анализа  
Корреляционного анализа  
Дисперсионного анализа

Регрессионный анализ

Рис. 3.9. Меню выбора результатов соответствующего анализа



Рис. 3.10. Вывод результатов регрессионного анализа



Рис. 3.11. Вывод результатов корреляционного анализа

Результаты обработки представлены в виде графиков (для корреляционного и регрессионного анализа) и числовых значений (для корреляционного и дисперсионного анализа).

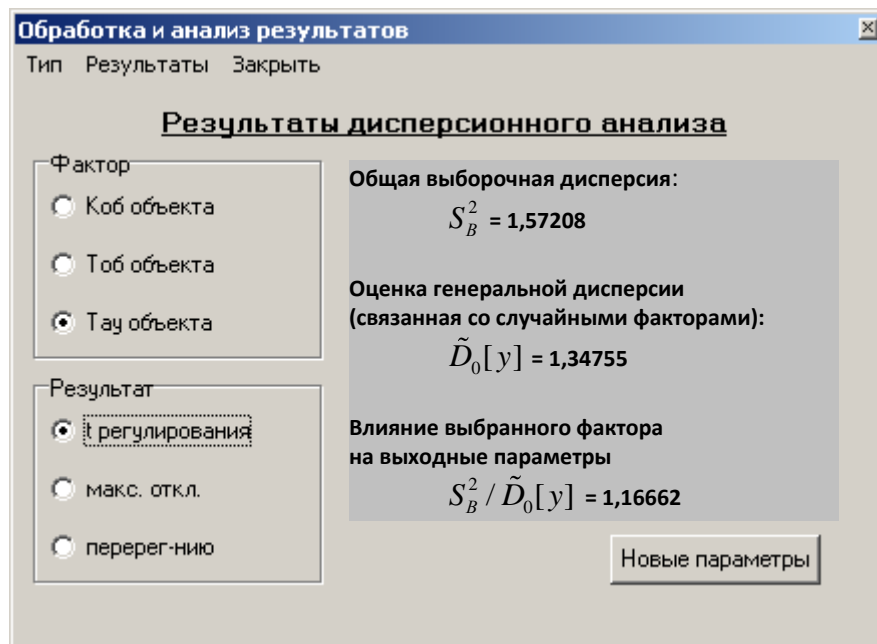


Рис. 3.12. Вывод результатов дисперсионного анализа

По результатам дисперсионного анализа пользователь должен принять или опровергнуть нулевую гипотезу  $H_0$  о равенстве средних значений на различных уровнях. Границу критической области определяют по таблицам

$F$ -распределения при заданных степенях свободы  $n_1 = (k - 1)$  и  $n_2 = k(n - 1)$  и выбранном уровне значимости  $\alpha$ , например равном 0,05. Это число представляет собой граничное значение, слева от которого лежит 95 % от общей площади под кривой  $F$ -распределения.

С помощью функции *Microsoft Excel*  $\text{FPACП}(x; n_1; n_2)$  можно вычислить вероятность (степень отклонения) одностороннего  $F$ -распределения  $P(x < F_{n_1 n_2})$ . Например,  $\text{FPACП}(3,158; 2; 57) = 0,05$ ,  $\text{FPACП}(4,998; 2; 57) = 0,01$ . Используя обратную функцию  $F$ -распределения  $\text{FPACПБР}(p; n_1; n_2)$ , можно вычислить теоретическое значение  $F_{\text{теор}}$ , которое необходимо сравнить с расчетным. Например,  $\text{FPACПБР}(0,05; 2; 57) = 3,158$ ,  $\text{FPACПБР}(0,01; 2; 57) = 4,998$ .

В программном модуле *SIANRG* предусмотрена защита от неверно введенных данных. Например, если введенные данные нулевые или не соответствуют формату данных, или процесс в САР – расходящийся, то пользователь получит соответствующие сообщения (рис. 3.13, 3.14).

После завершения расчетов пользователь, не закрывая программного модуля, может изменить исходные данные для новых анализов либо снова приступить к синтезу и анализу модели.

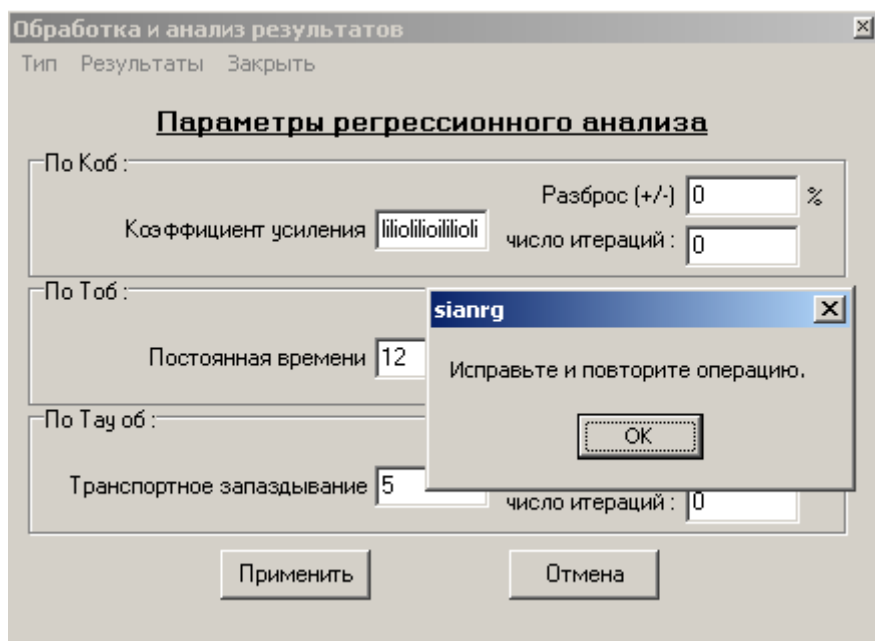


Рис. 3.13. Вывод сообщения о некорректно введенных данных

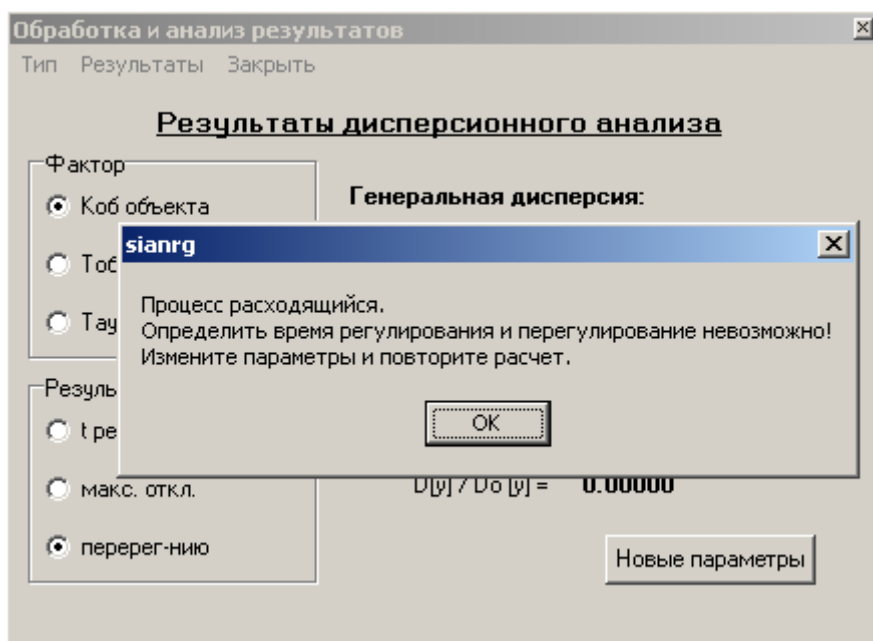


Рис. 3.14. Вывод сообщения о расхожимости процесса

### 3.3. Задания для лабораторной работы № 6

Цель лабораторной работы № 6 – обработать результаты моделирования САР и провести корреляционный анализ. Определить степень зависимости показателей качества САР при стохастическом варьировании параметров объекта управления.

1. Запустить программу *C:\Users student\TuMYЭ\Sianrg.exe*, которая используется для моделирования САР.

2. Составить параметрическую модель САР, для чего следует найти базовые (оптимальные) настройки П-, ПИ- и ПИД-регуляторов  $k_p^o$ ,  $T_i^o$  и  $T_d^o$ . Данные по передаточной функции (1.8) ОУ  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$  можно выбрать из табл. 1.1. Номер варианта уточнить у преподавателя. Определить характеристики качества замкнутой САР во временной области: время регулирования  $t_p$ , максимальное динамическое отклонение  $\sigma$  и перерегулирование  $\eta$ .

3. Провести обработку и анализ результатов стохастического моделирования замкнутой САР. Для корреляционного анализа определить попарные зависимости времени регулирования  $t_p$ , максимального динамического отклонения  $\sigma$ , перерегулирования  $\eta$  –  $\eta(t_p)$ ,  $\sigma(t_p)$ ,  $\eta(\sigma)$ , полученные при изменении  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и



$\tau_{об}$ . В ходе однофакторного эксперимента необходимо изменять математические ожидания, дисперсии  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$  и число итераций (20, 50, 100).

4. Результаты моделирования САР представить следующим образом:

- исходные данные ОУ, полученные базовые настройки П-, ПИ- и ПИД-регуляторов ( $k_p^o$ ,  $T_{и}^o$  и  $T_d^o$ ), а также базовые выходные параметры переходного процесса (время регулирования, максимальное динамическое отклонение, перерегулирование);
- семейство графиков по результатам обработки корреляционного анализа – попарные зависимости времени регулирования  $t_p$ , максимального динамического отклонения  $\sigma$ , перерегулирования  $\eta$  –  $\eta(t_p)$ ,  $\sigma(t_p)$ ,  $\eta(\sigma)$ , полученные в ходе однофакторного эксперимента при изменении математического ожидания, дисперсии  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$  и числа итераций (20, 50, 100);
- коэффициенты корреляции  $\tilde{r}_{t_p \sigma}^{k_{об}}$ ,  $\tilde{r}_{t_p \sigma}^{T_{об}}$ ,  $\tilde{r}_{\sigma \eta}^{k_{об}}$ ,  $\tilde{r}_{t_p \sigma}^{T_{об}}$ ,  $\tilde{r}_{t_p \sigma}^{T_{об}}$ ,  $\tilde{r}_{\sigma \eta}^{T_{об}}$ ,  $\tilde{r}_{t_p \sigma}^{\tau_{об}}$ ,  $\tilde{r}_{t_p \sigma}^{\tau_{об}}$ ,  $\tilde{r}_{\sigma \eta}^{\tau_{об}}$ ;
- выявить закономерность влияния варьируемых параметров регулятора на показатели качества системы и написать выводы.

### 3.4. Задания для лабораторной работы № 7

*Цель лабораторной работы № 7* – обработать результаты моделирования САР и провести регрессионный анализ. Определить линейные зависимости показателей качества САР при стохастическом варьировании параметров объекта управления.

1. Запустить программу *C:\Users student\TuMVЭ\Sianrg.exe*, которая используется для моделирования САР.

2. Составить параметрическую модель САР, для чего следует найти базовые (оптимальные) настройки П-, ПИ- и ПИД-регуляторов  $k_p^o$ ,  $T_{и}^o$  и  $T_d^o$ . Данные по передаточной функции (1.8) ОУ  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$  можно выбрать из табл. 1.1. Номер варианта уточнить у преподавателя. Определить характеристики качества замкнутой САР во временной области: время регулирования  $t_p$ , максимальное динамическое отклонение  $\sigma$  и перерегулирование  $\eta$ .

3. Провести обработку и анализ результатов стохастического моделирования замкнутой САР. Для регрессионного анализа определить зависимости: времени регулирования  $t_p$  от  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$ , максимального динамического отклонения  $\sigma$  от  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$ , перерегулирования  $\eta$  от  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$ . В ходе однофакторного эксперимента необходимо изменять разброс  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$  ( $\pm 5\%$ ,  $\pm 10\%$ ) и число итераций (20, 50, 100). Определить меру ошибки регрессионной модели – среднее квадратичное отклонение  $\sigma_e$  для каждой регрессии.

4. Результаты моделирования САР представить следующим образом:

- исходные данные ОУ, полученные базовые настройки П-, ПИ- и ПИД-регуляторов ( $k_p^o$ ,  $T_{и}^o$  и  $T_{д}^o$ ), а также базовые выходные параметры переходного процесса (время регулирования, максимальное динамическое отклонение, перерегулирование);
- семейство графиков по результатам обработки регрессионного анализа (зависимости времени регулирования  $t_p$  от  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$ , максимального динамического отклонения  $\delta$  от  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$ , перерегулирования  $\eta$  от  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$ ), полученные в ходе однофакторного эксперимента при изменении разброса  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$  ( $\pm 5\%$ ,  $\pm 10\%$ ) и числа итераций (20, 50, 100);
- уравнения линейной регрессионной модели  $t_p(k_{об})$ ,  $t_p(T_{об})$ ,  $t_p(\tau_{об})$ ,  $\sigma(k_{об})$ ,  $\sigma(T_{об})$ ,  $\sigma(\tau_{об})$ ,  $\eta(k_{об})$ ,  $\eta(T_{об})$ ,  $\eta(\tau_{об})$ ;
- для каждой регрессионной модели определить меру ошибки регрессионной модели – среднее квадратичное отклонение и построить  $\sigma_e$ -трубку;
- выявить закономерность влияния варьируемых параметров регулятора на показатели качества системы и написать выводы.

### 3.5. Задания для лабораторной работы № 8

*Цель лабораторной работы № 8* – обработать результаты моделирования САР и провести дисперсионный анализ. Определить генеральные дисперсии, оценку генеральных дисперсий и влияние выбранного фактора – показателя качества САР при стохастическом варьировании параметров объекта управления.

1. Запустить программу *C:\Users student\Sianrg.exe*, которая используется для моделирования САР.

2. Составить параметрическую модель САР, для чего следует найти базовые (оптимальные) настройки П-, ПИ- и ПИД-регуляторов  $k_p^o$ ,  $T_{\text{и}}^o$  и  $T_{\text{д}}^o$ . Данные по передаточной функции (1.8) ОУ  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$  можно выбрать из табл. 1.1. Номер варианта уточнить у преподавателя. Определить характеристики качества замкнутой САР во временной области: время регулирования  $t_p$ , максимальное динамическое отклонение  $\sigma$  и перерегулирование  $\eta$ .

3. Провести обработку и анализ результатов стохастического моделирования замкнутой САР. Для дисперсионного анализа определить общие выборочные дисперсии, оценки генеральных дисперсий показателей качества и влияние выбранного фактора ( $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$ ) на выходные параметры ( $t_p$ ,  $\sigma$ ,  $\eta$ ). В ходе однофакторного эксперимента необходимо изменять математические ожидания и дисперсии  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$ , число повторных наблюдений на  $i$ -м уровне  $n = 10, 20, 30$  и количество уровней  $k = 3, 10$ .

4. Результаты моделирования САР представить следующим образом:

- исходные данные ОУ, полученные базовые настройки П-, ПИ- и ПИД-регуляторов ( $k_p^o$ ,  $T_{\text{и}}^o$  и  $T_{\text{д}}^o$ ), а также базовые выходные параметры переходного процесса (время регулирования, максимальное динамическое отклонение, перерегулирование);

- результаты обработки дисперсионного анализа: общие выборочные дисперсии, оценки генеральных дисперсий показателей качества ( $t_p$ ,  $\sigma$ ,  $\eta$ ) и влияние выбранного фактора ( $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$ ) на выходные параметры ( $t_p$ ,  $\sigma$ ,  $\eta$ ) при изменении математических ожиданий и дисперсий  $k_{об}$ ,  $T_{об}$  и  $\tau_{об}$ , числа повторных наблюдений на  $i$ -м уровне  $n = 10, 20, 30$  и количества уровней  $k = 3, 10$ .

- выявить закономерность влияния варьируемых параметров регулятора на показатели качества системы и написать выводы.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Советов Б. Я. Моделирование систем: учебник для студентов вузов / Б. Я. Советов, С. Я. Яковлев. 6-е Изд., стер. М.: Высшая школа, 2009. 343 с.
2. Трофимова О. Г. Моделирование одноконтурной системы автоматического регулирования (САР) (синтез и анализ регуляторов – SIANRG). Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2012618486 / О. Г. Трофимова. М.: ФСИС. 2012.
3. Чесноков Ю. Н. Проектирование систем регулирования на ПК: учеб. пособие / Ю. Н. Чесноков, О. А. Гусев. Екатеринбург: УГТУ, 1999. 108 с.
4. Дружинина О. Г. Моделирование систем: учеб. пособие / О. Г. Дружинина. Екатеринбург: УГТУ – УПИ, 2005. Ч. 2. 196 с.
5. Владимировский Б. М. Математика. Общий курс / Б. М. Владимировский, А. Б. Гопрстко, Я. М. Ерусалимский. СПб.: Лань, 2002. 960 с.
6. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука: пер. с англ. / Р. Шеннон. М.: Мир, 1978. 418 с.
7. Волкова В. Н. Основы теории систем и системного анализа: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности «Системный анализ и управление» / В. Н. Волкова, А. А. Денисов. СПб.: СПбГТУ, 1997. 510 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМА ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОМ»

№ п/п	Наименование лабораторной работы	Объем учебного времени, ч
1	Детерминированное моделирование САР. Анализ чувствительности разомкнутой системы к вариациям параметров в частотной области	4
2	Детерминированное моделирование САР. Анализ чувствительности замкнутой системы к вариациям параметров во временной области	4
3	Стохастическое моделирование САР. Анализ вероятностных характеристик показателей качества к случайным вариациям параметров (математического ожидания) объекта	4
4	Стохастическое моделирование САР. Анализ вероятностных характеристик показателей качества к случайным вариациям настроек (математического ожидания) регулятора	6
5	Стохастическое моделирование САР. Анализ вероятностных характеристик показателей качества к случайным вариациям настроек (дисперсии) регулятора	6
6	Анализ и обработка результатов моделирования САР. Корреляционный анализ	4
7	Анализ и обработка результатов моделирования САР. Регрессионный анализ	4
8	Анализ и обработка результатов моделирования САР. Дисперсионный анализ	4

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
1. ДЕТЕРМИНИРОВАННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ .....	4
1.1. Методика моделирования систем.....	4
1.2. Модели систем автоматического регулирования .....	8
1.3. Описание работы программного модуля SIANRG для синтеза и анализа САР в частотной области .....	23
1.4. Задания к лабораторной работе № 1 .....	40
1.5. Описание работы программного модуля SIANRG для анализа САР во временной области.....	43
1.6. Задания к лабораторной работе № 2 .....	54
2. СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ .....	56
2.1. Имитационное моделирование .....	56
2.2. Классификация методов теории вероятностей и математической статистики .....	74
2.3. Описание работы программного модуля SIANRG при статистическом анализе разброса параметров объекта САР с ПИД-регулятором .....	84
2.4. Задания для лабораторной работы № 3 .....	93
2.5. Описание работы программного модуля SIANRG при статистическом анализе разброса настроек (математического ожидания) регулятора САР с ПИД-регулятором.....	96
2.6. Задания для лабораторной работы № 4 .....	101
2.7. Описание работы программного модуля SIANRG при статистическом анализе разброса настроек (дисперсии) регулятора САР с ПИД- регулятором .....	104
2.8. Задания для лабораторной работы № 5 .....	106

3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ, РЕГРЕССИОННЫЙ И ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ .....	109
3.1. Особенности обработки и анализа результатов вычислительного моделирования.....	109
3.2. Анализ результатов моделирования систем автоматического регулирования с использованием программного модуля SIANRG...	120
3.3. Задания для лабораторной работы № 6 .....	127
3.4. Задания для лабораторной работы № 7 .....	128
3.5. Задания для лабораторной работы № 8 .....	129
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	131
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	132

*Учебное издание*

**Трофимова** Ольга Геннадиевна

## ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Редактор *Л. Ю. Козяйчева*

Компьютерный набор *О. Г. Трофимовой*

Компьютерная верстка *К. Т. Горчаковой*



Подписано в печать 26.07.2013. Формат 60х84 1/16.

Бумага писчая. Плоская печать. Усл. печ. л. 8,5.

Уч.-изд. л. 6,0. Тираж 50 экз. Заказ № 1575.

Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ

6200949, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5

Тел.: +7(343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41

E-mail: rio@ustu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ

620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4

Тел. +7(343) 350-56-64, 350-90-13

Факс: +7(343) 358-93-06

E-mail: press-urfu@mail.ru